

Geometría Analítica II

Trabajo 27

Prof. Pablo Barrera

Alumno: Ernesto Velasco

Grupo: 4078

1.- Dada la cuádrica definida como $\mathcal{K}_0 : p^t A p - \gamma = 0$ con el valor de $\gamma = 30$ y la matriz A dada como

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Encontrar la matriz B tal que $B^t A B = D$, con D una matriz diagonal, para ello resolver el problema de los vectores y valores característicos.

Para resolver nuestro problema debemos considerar resolver $Au = \lambda u$ que también se puede ver como $(A - \lambda I)u = 0$ es decir se tiene que

$$F = A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 1 & 2 \\ 1 & -2 - \lambda & 3 \\ 2 & 3 & -5 - \lambda \end{pmatrix}$$

Ahora tomemos en cuenta el polinomio característico, el cual se encuentra dado por $\det(F) = \det(A - \lambda I)$, el cual se observa se encuentra dado por $(3 - \lambda)((-2 - \lambda)(-5 - \lambda) - 9) - (-5 - \lambda - 6) + 2(3 - 2(-2 - \lambda)) = (3 - \lambda)(\lambda^2 + 7\lambda + 10 - 9) + 11 + \lambda + 14 + 4\lambda = -\lambda^3 - 4\lambda^2 + 20\lambda + 3 + 5\lambda + 25 = -\lambda^3 - 4\lambda^2 + 25\lambda + 28$ por lo que finalmente el polinomio característico se encuentra dado como $\lambda^3 + 4\lambda^2 - 25\lambda - 28 = 0$ que se observa se tiene que las tres soluciones al resolver se encuentran dadas por $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = -7$ que son los valores característicos, ahora si se sustituyen dichos valores en $(A - \lambda_i I)u = 0$, se tienen los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\begin{array}{lll} -x + y + 2z = 0 & 4x + y + 2z = 0 & 10x + y + 2z = 0 \\ x - 6y + 3z = 0 & x - y + 3z = 0 & x + 5y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - 9z = 0 & 2x + 3y - 4z = 0 & 2x + 3y + 2z = 0 \end{array}$$

ya que la solución trivial no interesa para esto, se toma un vector para cada uno de los casos que se observan se pueden considerar de manera sencilla $v_1 = (3, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 2, 1)$ y $v_3 = (-1, -4, 7)$ ahora si se normalizan es los vectores se obtienen los vectores $u_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$, $v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ y $v_3 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{7}{2\sqrt{14}}\right)$ con los que finalmente se

puede conformar la matriz B de tal manera que se tiene

$$B = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{11}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{7}{2\sqrt{14}} \end{pmatrix} \text{ y se observa que } D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

que es la matriz de transformación y la matriz que define la cuádrica transformada respectivamente, en la imagen 1 se pueden observar ambas el hiperboloide de revolución antes y después de su transformación.

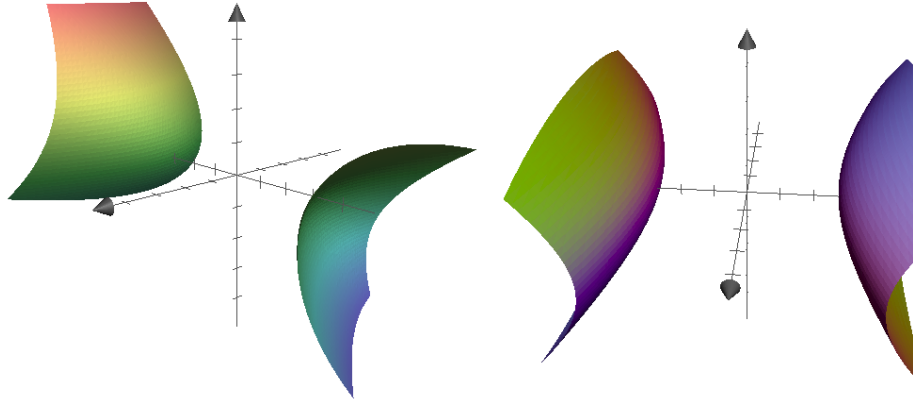


Figura 1: El hiperboloide original y el transformado