Paulina Pradel Soto **020506**
Geometría Analítica II

TRABAJO 26

1. Teniendo las siguientes ecuaciones, una de un cono y la otra de un plano respectivamente, decir bajo que condiciones la intersección es una recta, hipérbola, elipse, dos rectas, parábola, etc.

$$xy + 2yz + 4zx = 0$$
$$ax + by + r = z$$

RESPUESTAS

Empecemos por sustituir la coordenada z de la ecuación del plano en la ecuación del cono

$$xy + 2y(ax + by + r) + 4x(ax + by + r) = 0$$

$$4ax^2 + (2a + 4b + 1)xy + 2by^2 + 4rx + 2ry = 0$$

La matriz A es la siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 4a & a + 2b + 1/2 \\ a + 2b + 1/2 & 2b \end{pmatrix}$$

Resolvamos el problema $\det(A - \lambda I)$

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 4a - \lambda & a + 2b + 1/2 \\ a + 2b + 1/2 & 2b - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (4a - \lambda)(2b - \lambda) - \left(a + 2b + 1/2\right)^2$$

$$= \lambda^2 + \lambda(-4a - 2b) - \left(a^2 - 4ab + 4b^2 + a + 2b + 1/4\right)$$

por lo tanto tenemos que:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 + \lambda(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_1\lambda_2$$

donde $\lambda_1\lambda_2 = I = B^2 - 4AC$, es decir el discriminante de una cónica, y por ello para obtener las distintas cónicas necesitamos las siguientes condiciones:

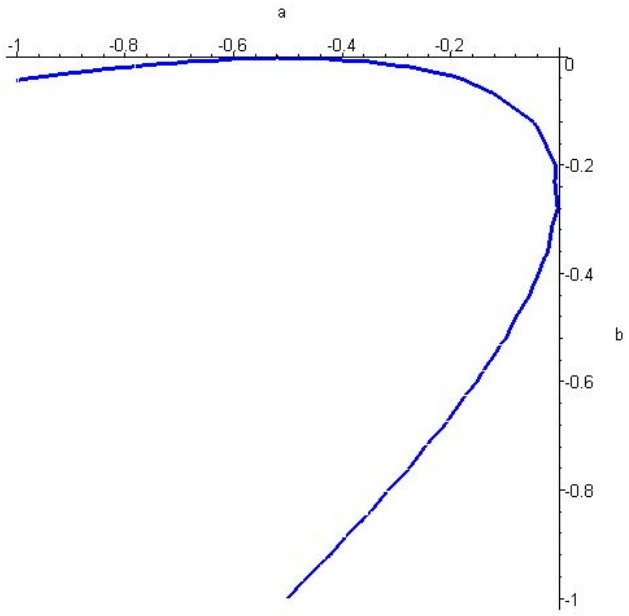
- ✓ Para una parábola

$$a^2 - 4ab + 4b^2 + a + 2b + \frac{1}{4} = 0$$

- ✓ Para una elipse o en su caso más particular un círculo

$$a^2 - 4ab + 4b^2 + a + 2b + \frac{1}{4} < 0$$

- ✓ Para una hipérbola o un par de rectas

$$a^2 - 4ab + 4b^2 + a + 2b + \frac{1}{4} > 0$$

Graficamos con Maple el primer caso