Geometría Analítica II

Trabajo 26

Prof. Pablo barrera Alumno: Ernesto Velasco Grupo: 4078

1.- Dadas las cónicas determinadas por la intersección del plano Π_0 y el cono $\mathcal{K}_o$, es decir:

$$\mathcal{C}_0 : \begin{cases} \mathcal{K}_0 : xy + 2yz + 4xz = 0 \\ \Pi_0 : z = ax + by + c \end{cases}$$

Determinar las condiciones que deben cumplirse para que la cónica sea una cónica central, en dicho caso tomar en cuenta cuando la curva es degenerada, es decir, es un par de rectas y el caso en el que la cónica es no central.

Para realizar cada una de las consideraciones adecuadas primeramente sustituyamos la ecuación del plano Π_0 en la del cono $\mathcal{K}_0$ para el valor despejado de z, por lo que se tiene $xy + 2y\left(ax + by + c\right) + 4x\left(ax + by + c\right) = 0$, desarrollando $xy + 2axy + 2by^2 + 2cy + 4bxy + 4ax^2 + 4cx = 0$ con lo cual se obtiene $4ax^2 + \left(2a + 4b + 1\right)xy + 2by^2 + 4cx + 2cy = 0$ que en forma matricial esta dada por

$$\mathcal{C}_1 : \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4a & \frac{2a+4b+1}{2} \\ \frac{2a+4b+1}{2} & 2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2c & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Ahora consideremos el determinante de la matriz A en su forma desarrollada, ya que las condiciones sobre el mismo determinarán el tipo de coónica, es decir, se tiene que $\det\left(A\right) = 8ab - \frac{\left(2a+4b+1\right)^2}{4}$ desarrollando se tiene que $\det\left(A\right) = 8ab - \frac{4a^2+16ab+16b^2+4a+8b+1}{4}$ con lo que $\det\left(A\right) = -a^2 - 4b^2 + 4ab - a - 2b + \frac{1}{4}$, ahora para que a cónica tenga centro se debe de cumplir que $Ap = g$, para lo cual $\det\left(A\right) \neq 0$ por lo cual se debe de cumplir, ya sea que $-a^2 - 4b^2 + 4ab - a - 2b + \frac{1}{4} < 0$ en el caso de una elipse o $-a^2 - 4b^2 + 4ab - a - 2b + \frac{1}{4} > 0$ en el caso de una hipérbola en el caso de que sea un par de rectas un par de rectas es necesario que el plano pase pase el vértice, que en este caso es el origen por lo cual para ello el plano Π_0 debe cumplir el que el termino lineal sea cero, en este caso se tiene que se debe cumplir el que $c = 0$. Ahora bien en caso de la que la cónica sea no central entonces es el caso restante para el determinante es decir, si la cónica no tiene centro (por lo cual será parábola) entonces se tiene que se cumple que $\det\left(A\right) = 0$ con lo cual no existe solución para el problema de centrar la cónica, y a su vez el sistema $Ap = -g$ no tiene solución, con lo que se debe cumplir el que $-a^2 - 4b^2 + 4ab - a - 2b + \frac{1}{4} = 0$. por lo cual englobando todas las condiciones se tendria un esquema como el siguiente:

$$\text{condiciones} \left\{ \begin{array}{lc} a^2+4b^2-4ab+a+2b \neq \frac{1}{4} & \text{cónica central} \\ a^2+4b^2-4ab+a+2b = \frac{1}{4} & \text{la cónica es no central (parábola)} \end{array} \right.$$

$$\text{cónica central} \left\{ \begin{array}{lc} a^2+4b^2-4ab+a+2b > \frac{1}{4} & \text{la cónica es una elipse} \\ a^2+4b^2-4ab+a+2b < \frac{1}{4} & \text{la cónica es una hipérbola} \end{array} \right.$$

$$\text{hipérbola} \left\{ \begin{array}{lc} \text{si se cumple que en } \Pi_0 : z = ax+by+c,\ c=0 & \text{se tiene un par de rectas} \end{array} \right.$$