Geometría Analítica II

Trabajo 25

Prof. Pablo Barrera   Alumno: Ernesto Velasco   Grupo: 4078

Dado el cono $\mathcal{K}_1 : z^2 = x^2 + y^2$ y el plano $\Pi_1 : z = ax + by + c$, sabiendo que la intersección de esto dos producirá una cónica, indicar cuando:

A) La cónica es una elipse, hipérbola o parábola

Para ello sustituyamos la ecuación del plano Π_1 en la del cono $\mathcal{K}_1$, ya que los puntos sobre la cónica deben cumplir ambas ecuaciones al mismo tiempo es valido hacer esto, por lo que se tiene $(ax + by + c)^2 = x^2 + y^2$, desarrollando $a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy + 2acx + 2bcy + c^2 = x^2 + y^2$ con lo cual se obtiene $(a^2 - 1)\,x^2 + 2abxy + (b^2 - 1)\,y^2 + 2acx + 2bcy + c^2 = 0$ que en forma matricial esta dada por

$$\mathcal{C}_1 : \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 - 1 & ab \\ ab & b^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} ac & bc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c^2 = 0$$

Ahora solo consideremos el determinante de la matriz A es decir $\det(A) = a^2b^2 - (a^2 - 1)\,(b^2 - 1)$ desarrollando se tiene que $\det(A) = a^2b^2 - (a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1)$ con lo que $\det(A) = a^2 + b^2 - 1$, recordando la condición para el determinante en los tres casos de las cónicas, se tiene que se cumple alguna de las tres siguientes

$$\text{casos y condiciones que se cumplen} \begin{cases} a^2 + b^2 < 1 & \text{la cónica es una elipse} \\ a^2 + b^2 > 1 & \text{la cónica es una hipérbola} \\ a^2 + b^2 = 1 & \text{la cónica es una parábola} \end{cases}$$

si esto se considera gráficamente se tendrían, el área del circulo unitario, el circulo unitario y el área fuera de este, es decir para todo punto dentro del área de la circunferencia con coordenadas (a, b) este punto al sustituir sus coordenadas en la matriz A dará como resultado una elipse, análogamente en el caso de la hipérbola si se toma un punto fuera del área de la circunferencia unitaria y se toman sus coordenadas (x_0, y_0) como $a = x_0$ y $b = y_0$ al sustituir en la matriz A se obtendrá una hipérbola, en el caso de que la cónica fuese una parábola entonces se debe de cumplir que $a^2 + b^2 = 1$ por lo cual todo punto sobre la circunferencia unitaria con coordenadas (x_p, y_p) cumple los requisitos, si como se a dicho anteriormente se consideran estas como a y b respectivamente se obtendrá que la intersección del plano Π_1 con el cono $\mathcal{K}_1$ es una parábola en la imagen 1 se muestran las zonas en las que un punto determina ya sea una parábola, una hipérbola o una elipse, a partir de sus coordenadas. En la imagen 2 se muestran los tres casos distintos de cónicas producidos al cortar el cono con un plano.

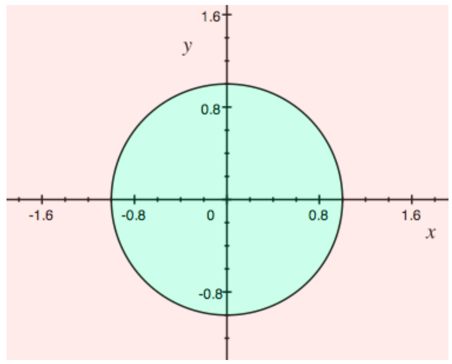

Figura 1: El circulo unitario y las áreas dentro y fuera de este, un punto en cada zona determina una cónica distinta

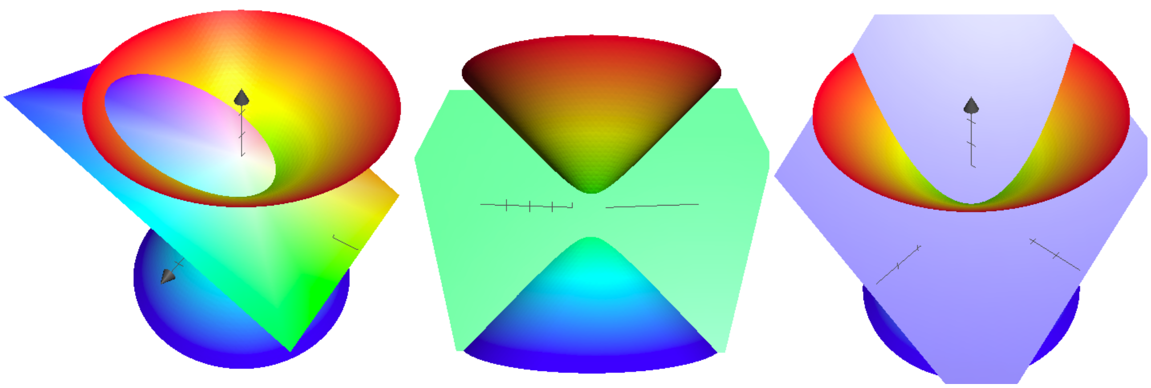

Figura 2: Los tres casos de cónica no degenerada

B) ¿Cuándo es una circunferencia y cuando un par de rectas?

En el caso de la circunferencia se debe de cumplir el que $a = 0$, $b = 0$, véase la ecuación del cono $\mathcal{K}_1 : z^2 = x^2 + y^2$, esta por si misma ya podría se la ecuación de una circunferencia de para ello se debería de cumplir que $z^2 = k^2$ con k constante para ello se debe cumplir que $z = c$, con $c \neq 0$ ya que si no la circunferencia sería un único punto, por lo cual $a = 0$ y $b = 0$, en la imagen 3 se puede observar una circunferencia producida por un plano de esta forma, en el caso del par de rectas, se debe de cumplir que $c = 0$, con lo cual se elimina el termino lineal de la ecuación de la cónica y se fuerza al plano a cortar el origen que es también el vértice del cono, ahora para que sea un par de rectas y no solamente un punto (el origen) el determinante debe ser el de una hipérbola para lo cual se debe de cumplir la condición de que $a^2 + b^2 > 1$ con lo cual al tener una hipérbola que se junta esta debe ser un par de rectas que se cortam. En la imagen 3 se pueden observar 2 planos que producen cada una de las figuras planas de las que se han hablado.

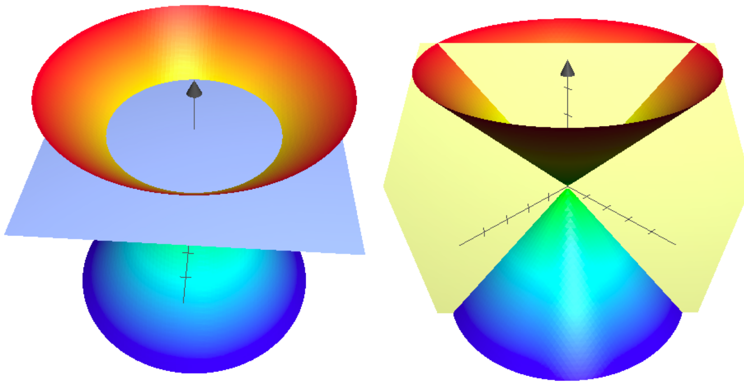

Figura 3: Planos que al cortar el cono producen dos rectas o una circunferencia