Paulina Pradel Soto **210406**
Geometría Analítica II

TRABAJO 24

1. En clase vimos que teniendo la ecuación de una esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0,$$

y la siguiente ecuación de un plano

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

podemos encontrar la ecuación del cono con vértice en el origen y que contiene al círculo que se forma al intersectar la esfera con el plano.

Dada esta ecuación calcular las raíces de la cúbica al resolver el problema $Au = \lambda u$, y encontrar los vectores u_1, u_2, u_3, para los valores $a = 1, b = 2, c = 3.$

RESPUESTAS

La manera en la que encontramos la ecuación del cono es sustituyendo la del plano en la de la esfera, obteniendo lo siguiente:

$$xy\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + xz\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + yz\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) = 0$$

Ahora sustituyamos $a = 1, b = 2, c = 3.$

$$xy\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{1}\right) + xz\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{1}\right) + yz\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\frac{5}{2}xy + \frac{10}{3}xz + \frac{13}{6}yz = 0$$

La matriz asociada a la ecuación es la siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5/2 & 10/3 \\ 5/2 & 0 & 13/6 \\ 10/3 & 13/6 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora resolvamos el problema $Au = \lambda u$
Primero encontremos $\det(A - \lambda I) = 0$
La matriz $(A - \lambda I)$ es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 5/2 & 10/3 \\ 5/2 & -\lambda & 13/6 \\ 10/3 & 13/6 & -\lambda \end{pmatrix}$$

y el polinomio a resolver es el siguiente:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \frac{397}{18}\lambda - \frac{325}{9} = 0$$

Sacamos las raíces de este polinomio y obtenemos

$$\lambda_1 = -2$$
$$\lambda_2 = 1 + \frac{7\sqrt{14}}{6}$$
$$\lambda_3 = 1 - \frac{7\sqrt{14}}{6}$$

Ahora resolvemos lo siguiente

$$Au_1 = \lambda_1 u_1$$
$$Au_2 = \lambda_2 u_2$$
$$Au_3 = \lambda_3 u_3$$

Para λ_1 intenté resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$2x + 5/2\, y + 10/3\, z = 0$$
$$5/2\, x + 2y + 13/6\, z = 0$$
$$10/3\, x + 13/6\, y + 2z = 0$$

Sin embargo todas las variables se me eliminaban, por lo tanto intenté resolverlo usando Maple y obtuve el siguiente resultado:

$$x = \frac{5\,z}{9},\ y = -\frac{16\,z}{9},\ z = z$$

Lo cual quiere decir que la z queda libre, es decir que existen una infinidad de soluciones para este problema, y lo mismo sucede con λ_2 y λ_3, para las cuales obtuve los siguientes resultados respectivamente:

$$x = x,\ y = \frac{22}{65}x + \frac{9}{65}x\sqrt{14},\ z = \frac{3}{65}x + \frac{16}{65}x\sqrt{14}$$

$$x = x,\ y = \frac{22}{65}x - \frac{9}{65}x\sqrt{14},\ z = \frac{3}{65}x - \frac{16}{65}x\sqrt{14}$$

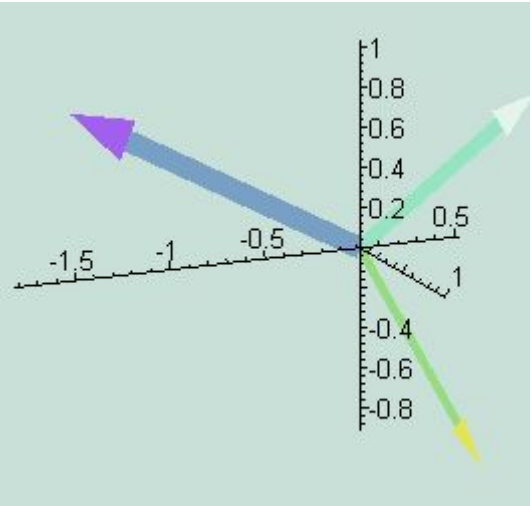
Escogamos entonces a los vectores de la siguiente manera:

$$u_1 = \left(5/9, -16/9, 1\right)$$

$$u_2 = \left(1, 31/65, 3+16\sqrt{14}/65\right)$$

$$u_2 = \left(1, 13/65, 3-16\sqrt{14}/65\right)$$

Al graficar estos vectores en R^3, con Maple obtenemos lo siguiente



Podemos apreciar que los vectores son ortogonales entre si, lo cual es una condición necesaria para tener nuestra matriz de cambio de coordenadas, que simplemente es la siguiente:

$$B = \begin{pmatrix} 5/9 & 1 & 1 \\ -16/9 & 31/65 & 13/65 \\ 1 & 3+16\sqrt{14}/65 & 3-16\sqrt{14}/65 \end{pmatrix}$$