Geometría Analítica II

Trabajo 24

Prof. Pablo Barrera   Alumno: Ernesto Velasco   Grupo: 4078

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{b}+\frac{b}{a} & \frac{a}{c}+\frac{c}{a} \\ \frac{a}{b}+\frac{b}{a} & 0 & \frac{b}{c}+\frac{c}{b} \\ \frac{a}{c}+\frac{c}{a} & \frac{b}{c}+\frac{c}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

y los valores de $a=1$, $b=2$ y $c=3$, encontrar una matriz B tal que $B^tAB=D$ con D una matriz diagonal.

Sustituyendo primeramente los valores dados de a,b,c se tiene que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} & \frac{10}{3} \\ \frac{5}{2} & 0 & \frac{13}{6} \\ \frac{10}{3} & \frac{13}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora es necesario encontrar las soluciones a $\det(A-\lambda I)=0$ es decir $\lambda\left(\lambda^2-\left(\frac{13}{6}\right)^2\right)-\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}\lambda+\left(\frac{10}{3}\right)\left(\frac{13}{6}\right)\right)-\frac{10}{3}\left(\frac{10}{3}\lambda+\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{13}{6}\right)\right)=0$ simplificando se tiene $\lambda^3-\lambda\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{10}{3}\right)^2+\left(\frac{13}{6}\right)^2\right)-2\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{10}{3}\right)\left(\frac{13}{6}\right)=0$ con lo que se tiene que $\lambda^3-\frac{397}{18}\lambda-\frac{325}{9}=0$ que tiene una solución $\lambda=-2$ con lo que $(\lambda+2)\left(\lambda^2-2\lambda-\frac{325}{18}\right)=0$, resolviendo $\lambda^2-2\lambda-\frac{325}{18}=0$ se obtiene los otros dos valores de λ que son $\lambda=1+\frac{7\sqrt{14}}{6}$ y $\lambda=1-\frac{7\sqrt{14}}{6}$ con lo que ordenando las soluciones se tienen $\lambda_1=1+\frac{7\sqrt{14}}{6}$, $\lambda_2=1-\frac{7\sqrt{14}}{6}$ y $\lambda_3=-2$ con lo cual se tienen los sistemas de ecuaciones siguientes

$$\begin{array}{ll} -\left(1+\frac{7\sqrt{14}}{6}\right)x+\frac{5}{2}y+\frac{10}{3}z=0 & -\left(1-\frac{7\sqrt{14}}{6}\right)x+\frac{5}{2}y+\frac{10}{3}z=0 \\ \frac{5}{2}x-\left(1+\frac{7\sqrt{14}}{6}\right)y+\frac{10}{3}z=0 & \frac{5}{2}x-\left(1-\frac{7\sqrt{14}}{6}\right)y+\frac{10}{3}z=0 \\ \frac{10}{3}x+\frac{5}{2}y-\left(1+\frac{7\sqrt{14}}{6}\right)z=0 & \frac{10}{3}x+\frac{5}{2}y-\left(1-\frac{7\sqrt{14}}{6}\right)z=0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2x+\frac{5}{2}y+\frac{10}{3}z=0 \\ \frac{5}{2}x+2y+\frac{10}{3}z=0 \\ \frac{10}{3}x+\frac{5}{2}y+2z=0 \end{array}$$

ya que no me interesa la solución trivial, se puede observar, que los siguientes vectores satisfacen $P_0 = \left(65\frac{21+\frac{28}{3}\sqrt{14}}{\left(35+\frac{119}{6}\sqrt{14}\right)\left(6+7\sqrt{14}\right)}, \frac{133+42\sqrt{14}}{105+\frac{119}{2}\sqrt{14}}, 1\right)$, $P_1 = \left(65\frac{21-\frac{28}{3}\sqrt{14}}{\left(35-\frac{119}{6}\sqrt{14}\right)\left(6-7\sqrt{14}\right)}, \frac{133-42\sqrt{14}}{105-\frac{119}{2}\sqrt{14}}, 1\right)$ y $P_2 = \left(\frac{5}{9}, -\frac{16}{9}, 1\right)$ que al normalizar cada uno de estos vectores, se tienen

$$U_0 = \left(65\frac{21+\frac{28}{3}\sqrt{14}}{\left(35+\frac{119}{6}\sqrt{14}\right)\left(6+7\sqrt{14}\right)\sqrt{\left(65\frac{21+\frac{28}{3}\sqrt{14}}{\left(35+\frac{119}{6}\sqrt{14}\right)\left(6+7\sqrt{14}\right)}\right)^2+\left(\frac{133+42\sqrt{14}}{105+\frac{119}{2}\sqrt{14}}\right)^2+1}}, \right.$$

$$\frac{133+42\sqrt{14}}{\left(105+\frac{119}{2}\sqrt{14}\right)\sqrt{\left(65\frac{21+\frac{28}{3}\sqrt{14}}{\left(35+\frac{119}{6}\sqrt{14}\right)\left(6+7\sqrt{14}\right)}\right)^2+\left(\frac{133+42\sqrt{14}}{105+\frac{119}{2}\sqrt{14}}\right)^2+1}}$$

,

$$\left. \frac{1}{\sqrt{\left(65\frac{21+\frac{28}{3}\sqrt{14}}{\left(35+\frac{119}{6}\sqrt{14}\right)\left(6+7\sqrt{14}\right)}\right)^2+\left(\frac{133+42\sqrt{14}}{105+\frac{119}{2}\sqrt{14}}\right)^2+1}}\right)$$

$$U_1 = \left(65\frac{21-\frac{28}{3}\sqrt{14}}{\left(35-\frac{119}{6}\sqrt{14}\right)\left(6-7\sqrt{14}\right)\sqrt{\left(65\frac{21-\frac{28}{3}\sqrt{14}}{\left(35-\frac{119}{6}\sqrt{14}\right)\left(6-7\sqrt{14}\right)}\right)^2+\left(\frac{133-42\sqrt{14}}{105-\frac{119}{2}\sqrt{14}}\right)^2+1}}, \right.$$

$$\frac{133-42\sqrt{14}}{\left(105-\frac{119}{2}\sqrt{14}\right)\sqrt{\left(65\frac{21-\frac{28}{3}\sqrt{14}}{\left(35-\frac{119}{6}\sqrt{14}\right)\left(6-7\sqrt{14}\right)}\right)^2+\left(\frac{133-42\sqrt{14}}{105-\frac{119}{2}\sqrt{14}}\right)^2+1}}$$

,

$$\left. \frac{1}{\sqrt{\left(65\frac{21-\frac{28}{3}\sqrt{14}}{\left(35-\frac{119}{6}\sqrt{14}\right)\left(6-7\sqrt{14}\right)}\right)^2+\left(\frac{133-42\sqrt{14}}{105-\frac{119}{2}\sqrt{14}}\right)^2+1}}\right)$$

$$U_2 = \left(\frac{5}{\sqrt{362}}, -\frac{16}{\sqrt{362}}, \frac{9}{\sqrt{362}}\right)$$

, con los cuales se conforma la matriz ortonormal siguiente;

$$B = \left(\ U_0 | U_1 | U_2\ \right)$$

que al realizar el producto matricial $B^t A B = D$, en el que $B^t = B^{-1}$, se tiene que

$$D = \begin{pmatrix} 1 + \frac{7}{6}\sqrt{14} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{7}{6}\sqrt{14} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

con lo cual esta matriz define un cono con centro en el origen y cuyo eje es alguno de los ejes coordenados, en la imagen 1 se muestran el cono original y el transformado.

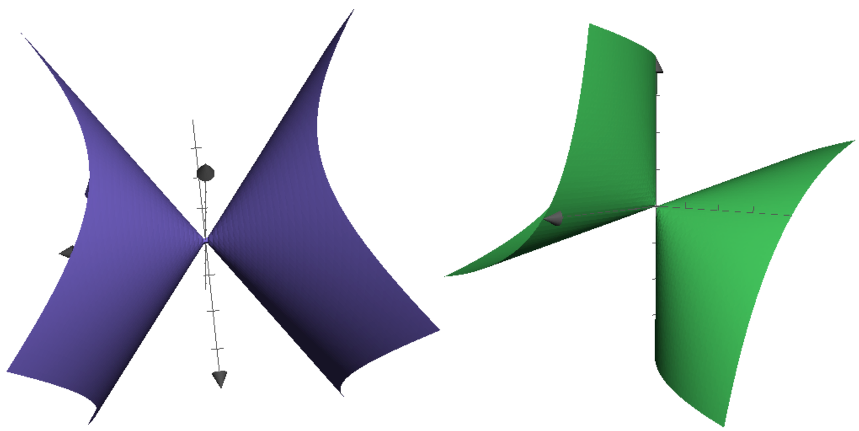

Figura 1: El cono antes y después de la transformación