

Geometría Analítica II

Trabajo 23

Prof. Pablo Barrera

Alumno: Ernesto Velasco

Grupo: 4078

Encuentre la ecuación del cono con centro en el origen, que pasa por el círculo definido como

$$\mathcal{C}_1 \begin{cases} \mathcal{E}_1 : x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + b = 0 \\ \Pi_1 : n_1x + n_2y + n_3z = r \end{cases}$$

Dado que la ecuación de la esfera $\mathcal{E}_1$ se puede escribir como $\mathcal{E}_1 : (x + a)^2 + y^2 + z^2 = a^2 - b$ de aquí que el centro de la esfera tiene coordenadas $P_e(-a, 0, 0)$ y tomemos el vector normal al plano Π_1 , es decir $n = (n_1, n_2, n_3)$, ahora considerese la recta definida como $\ell_1 : R(t) = P_e + tn$ con lo que se tiene lo siguiente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tn_1 - a \\ tn_2 \\ tn_3 \end{pmatrix}$$

que al sustituir en la ecuación del plano, con lo que se encuentra el valor de t adecuado, implica que $tn_1^2 - an_1 + tn_2^2 + tn_3^2 = r$ con lo cual $t = \frac{r + an_1}{\|n\|^2}$ con lo que el centro del círculo $\mathcal{C}_1$ tiene coordenadas $P_c = \left(\frac{rn_1 + an_1^2 + a\|n\|^2}{\|n\|^2}, \frac{rn_2 + an_1n_2}{\|n\|^2}, \frac{rn_3 + an_1n_3}{\|n\|^2} \right)$, ahora se debe encontrar la ecuación vectorial de esta circunferencia, para ello se debe tomar un vector sobre el plano P_0 , para ello hagamos $y = 0$ y $z = 0$ con lo cual se tiene el vector $P_0 = \left(\frac{r}{n_1}, 0, 0 \right)$, si se considera el vector $V_1 = P_0 - P_c$, es decir $V_1 = \left(\frac{r}{n_1} - \frac{rn_1 + an_1^2 + a\|n\|^2}{\|n\|^2}, -\frac{rn_2 + an_1n_2}{\|n\|^2}, -\frac{rn_3 + an_1n_3}{\|n\|^2} \right)$, para seguir se debe encontrar un vector P_2 en el plano tal que $(V_1) \cdot (P_2 - P_c) = 0$ que se observa que el vector

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0, 0, \frac{r \left(\frac{r}{n_1} - \frac{rn_1 + an_1^2 + a\|n\|^2}{\|n\|^2} \right)}{n_3 \left(\frac{r}{n_1} - \frac{rn_1 + an_1^2 + a\|n\|^2}{\|n\|^2} \right) + n_1 \left(-\frac{rn_3 + an_1n_3}{\|n\|^2} \right)} \end{pmatrix}$$

con lo que $V_2 = P_2 - P_c$, ahora si se normalizan los vectores V_1 y V_2 se obtienen los vectores $u_1 = \frac{1}{\|V_1\|}V_1$ y $u_2 = \frac{1}{\|V_2\|}V_2$, tomando un punto cualquiera sobre la circunferencia sea este el punto $P_k = \left(0, \frac{r}{n_2} - \frac{n_3^2 r}{n_2(n_2^2 + n_3^2)} - \frac{n_3}{n_2} \sqrt{\frac{n_3^2 r^2 - (bn_2 + r)(n_2^2 + n_3^2)}{n_2^2 + n_3^2}}, \frac{n_3 r}{n_2^2 + n_3^2} + \sqrt{\frac{n_3^2 r^2 - (bn_2 + r)(n_2^2 + n_3^2)}{n_2^2 + n_3^2}} \right)$ tomando la distancia de este al centro de la circunferencia P_c se tendrá el radio del círculo con

lo que $r = d(P_k, P_c)$ ya con esto se puede conformar la ecuación en su forma paramétrica de la circunferencia es decir:

$$\mathcal{C}_1 : P(\theta) = P_c + d(P_k, P_c) \cos \theta u_1 + d(P_k, P_c) \sin \theta u_2$$

ahora para construir la ecuación del cono lo único que debe de hacerse es considerar todas las rectas que pasan por el origen y por un punto sobre la circunferencia $\mathcal{C}_1$ es decir que se tendrán rectas de la forma $P(s) = sP_l$ con P_l un punto sobre la circunferencia, ya que el cono se conforma con todas las rectas de esta forma se tiene que a su vez el cono se encuentra dado por $\mathcal{K}_\varepsilon : Q(s) = s\mathcal{C}_1$ es decir

$$\mathcal{K}_\varepsilon : Q(s) = s(P_c + d(P_k, P_c) \cos \theta u_1 + d(P_k, P_c) \sin \theta u_2) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, s \in \mathbb{R}$$

En la imagen 1 puede observarse un cono, que pasa por una circunferencia específica, se observan el plano y la esfera que determinan la circunferencia y el cono con centro en el origen que pasa por la intersección de las dos estructuras mencionadas antes

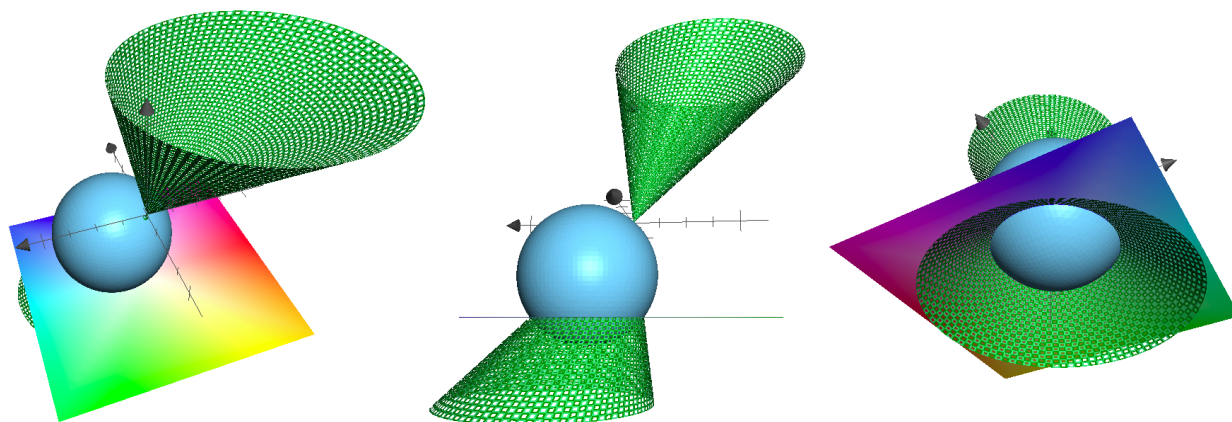


Figura 1: Tres vistas distintas de un cono que pasa por una circunferencia