

TRABAJO 22

1. Encontrar la ecuación de un cono con el método visto en clase, y encontrar la matriz A de coeficientes de la ecuación, para los siguientes vectores u :

a) $u = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

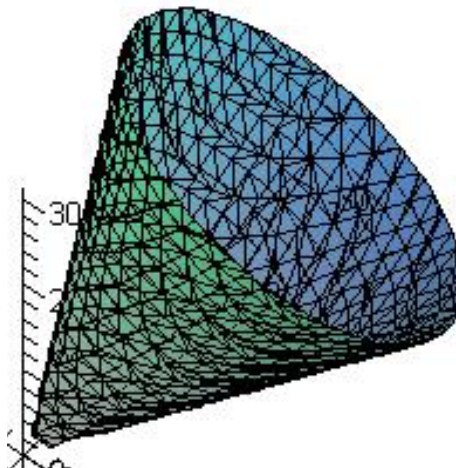
c) $u = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$

todo esto considerando que la constante de proporcionalidad $k=1$.

RESPUESTAS

Primero rehagamos el procedimiento hecho en clase para poder entenderlo mejor y encontrar lo que necesitamos.

Supongamos que tenemos un cono cualquiera como el de la siguiente figura:



La ecuación del cono es de la siguiente forma:

$$x^2 + y^2 - k^2 z = 0$$

Suponemos a un vector u (unitario), en la dirección del eje del cono. Sabemos que el centro del cono se encuentra sobre este eje, y nuestro punto p se encuentra sobre el círculo formado por el cono.

Por lo tanto podemos hacer

$$p^t u = \|p\| \|u\| \cos \alpha = \|p\| \cos \alpha$$

donde α es el ángulo formado entre p y u . Encontramos con esto el centro del cono

$$\bar{c} = p^t u$$

Ahora encontramos el radio del cono

$$\|p - c\|^2 = k^2 \|p\|^2$$

Desarrollando lo anterior tenemos que

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - (xu_1 + yu_2 + zu_3) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \right\|^2 = k^2 (x^2 + y^2 + z^2)$$

a) $u = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} :$

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}} (x + y + z) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\frac{2}{3} (x^2 + y^2 + z^2) = (x^2 + y^2 + z^2)$$

Y la ecuación del cono queda como:

$$\left(\frac{1}{9} x^2 + \frac{1}{9} y^2 + \frac{1}{9} z^2 \right) = 0$$

Esto no representa precisamente un cono, sino un punto en el espacio.
Y la matriz A es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} :$$

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y+z) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{4}z^2 \right) = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } u = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} :$$

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{14}}(x+2y+3z) \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|^2 = (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\left(\frac{6}{7}x^2 + \frac{2}{7}y^2 + \frac{9}{14}z^2 \right) = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 6/7 & 0 & 0 \\ 0 & 2/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$