

Geometría Analítica II

Trabajo 22

Prof. Pablo barrera

Alumno: Ernesto Velasco

Grupo: 4078

1.- Dado $\|p_0 - (p_0^t u_i) u_i\|^2 = k^2 \|p_0\|^2$, desarrollar y encontrar la ecuación del cono de que representa para valores cada uno de los valores que a continuación se dan y encontrar la matriz A que cumple $\mathcal{C}(P) : P^t A P = 0$

a)

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo el valor de u_1 se tiene que $\left\| (x, y, z) - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z \right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\|^2 = k^2 (x^2 + y^2 + z^2)$ desarrollando $\left\| (x, y, z) - \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z, \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z, \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z \right) \right\|^2 = k^2 x^2 + k^2 y^2 + k^2 z^2$ con lo que $\left\| \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \right) \right\|^2 = k^2 x^2 + k^2 y^2 + k^2 z^2$ por lo cual se tiene $\frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{9}yx + \frac{1}{9}y^2 - \frac{4}{9}xz + \frac{2}{9}yz + \frac{1}{9}z^2 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{4}{9}yx + \frac{4}{9}y^2 + \frac{2}{9}xz - \frac{4}{9}yz + \frac{1}{9}z^2 + \frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{9}yx + \frac{2}{9}y^2 - \frac{4}{9}xz - \frac{4}{9}yz + \frac{4}{9}z^2 = k^2 x^2 + k^2 y^2 + k^2 z^2$ simplificando se tiene $\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}yx + \frac{2}{3}y^2 + \frac{2}{3}xz - \frac{2}{3}yz + \frac{2}{3}z^2 = k^2 x^2 + k^2 y^2 + k^2 z^2$ por lo cual se tiene $\left(\frac{2}{3} - k^2 \right) x^2 - \frac{2}{3}xy + \left(\frac{2}{3} - k^2 \right) y^2 - \frac{2}{3}xz - \frac{2}{3}yz + \left(\frac{2}{3} - k^2 \right) z^2 = 0$ se sería la ecuación de la familia de conos con vértice en el origen y cuyo eje está determinado por el vector u_1 y que en la forma matricial se encuentra dada por

$$\mathcal{C}_{u_1} : P^t \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - k^2 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} - k^2 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} - k^2 \end{pmatrix} P = 0$$

b)

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al sustituir el valor de u_3 en la ecuación se tiene que $\left\| (x, y, z) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \right\|^2 = k^2 (x^2 + y^2 + z^2)$ por lo que $\left\| (x, y, z) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, 0 \right) \right\|^2 = k^2 x^2 + k^2 y^2 + k^2 z^2$ con lo

cual $\left\| \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y, -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, z \right) \right\|^2 = k^2x^2 + k^2y^2 + k^2z^2$ con lo que $\frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + z^2 = k^2x^2 + k^2y^2 + k^2z^2$ por lo cual al factorizar se tiene $\left(\frac{1}{2} - k^2\right)x^2 - xy + \left(\frac{1}{2} - k^2\right)y^2 + (1 - k^2)z^2 = 0$ se sería la ecuación de la familia de conos con vértice en el origen y cuyo eje es la recta determinada por el vector u_2 y que en la forma matricial se encuentra dada por

$$\mathcal{C}_{u_2} : P^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - k^2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - k^2 \end{pmatrix} P = 0$$

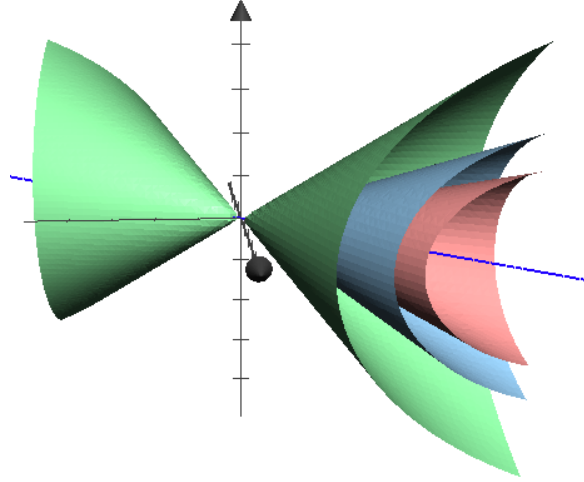


Figura 1: Conos obtenidos al variar el valor de k , cuyo eje lo determina la recta generada por u_2

c)

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Primeramente se debe sustituir el valor de u_3 en la ecuación que va a determinar el cono, con lo cual se tiene $\left\| (x, y, z) - \left(\frac{1}{\sqrt{14}}x + \frac{2}{\sqrt{14}}y + \frac{3}{\sqrt{14}}z \right) \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right) \right\|^2 = k^2(x^2 + y^2 + z^2)$ por lo que $\left\| (x, y, z) - \left(\frac{1}{14}x + \frac{2}{14}y + \frac{3}{14}z, \frac{2}{14}x + \frac{4}{14}y + \frac{6}{14}z, \frac{3}{14}x + \frac{6}{14}y + \frac{9}{14}z \right) \right\|^2 = k^2x^2 + k^2y^2 + k^2z^2$ con lo cual $\left\| \left(\frac{13}{14}x - \frac{2}{14}y - \frac{3}{14}z, -\frac{2}{14}x + \frac{10}{14}y - \frac{6}{14}z, -\frac{3}{14}x - \frac{6}{14}y + \frac{5}{14}z \right) \right\|^2 = k^2x^2 + k^2y^2 + k^2z^2$ que al desarrollar implica $\frac{169}{196}x^2 - \frac{52}{196}xy + \frac{4}{196}y^2 - \frac{78}{196}xz + \frac{12}{196}yz + \frac{9}{196}z^2 + \frac{4}{196}x^2 - \frac{40}{196}xy + \frac{100}{196}y^2 + \frac{24}{196}xz - \frac{120}{196}yz + \frac{36}{196}z^2 + \frac{9}{196}x^2 + \frac{36}{196}xy + \frac{36}{196}y^2 - \frac{30}{196}xz - \frac{60}{196}yz + \frac{25}{196}z^2 = k^2x^2 + k^2y^2 + k^2z^2$ que simplificando se tiene $\frac{182}{196}x^2 - \frac{56}{196}xy + \frac{140}{196}y^2 - \frac{84}{196}xz - \frac{168}{196}yz + \frac{70}{196}z^2 = k^2x^2 + k^2y^2 + k^2z^2$ por lo cual se tiene $\left(\frac{13}{14} - k^2\right)x^2 - \frac{2}{7}xy + \left(\frac{5}{7} - k^2\right)y^2 - \frac{3}{7}xz - \frac{6}{7}yz + \left(\frac{5}{14} - k^2\right)z^2 = 0$ que sería la ecuación de la familia de conos con vértice en el origen y cuyo eje está determinado por

el vector u_3 , y que en la forma matricial se encuentra dada por

$$\mathcal{C}_{u_1} : P^t \begin{pmatrix} \frac{13}{14} - k^2 & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} - k^2 & -\frac{3}{7} \\ -\frac{3}{14} & -\frac{3}{7} & \frac{5}{14} - k^2 \end{pmatrix} P = 0$$

d)

$$k = 1$$

Al tomar el valor de $k = 1$ se debe tomar $u = (u_x, u_y, u_z)$ por lo que el desarrollo es el siguiente $\|(x, y, z) - (u_x x + u_y y + u_z z)(u_x, u_y, u_z)\|^2 = k^2(x^2 + y^2 + z^2)$ por lo que se tiene $\|(x, y, z) - (u_x^2 x + u_x u_y y + u_x u_z z, u_x u_y x + u_y^2 y + u_y u_z z, u_x u_z x + u_y u_z y + u_z^2 z)\|^2 = k^2 x^2 + k^2 y^2 + k^2 z^2$ con lo cual $\|((1 - u_x^2)x - u_x u_y y - u_x u_z z, -u_x u_y x + (1 - u_y^2)y - u_y u_z z, -u_x u_z x - u_y u_z y + (1 - u_z^2)z)\|^2 = k^2 x^2 + k^2 y^2 + k^2 z^2$ que desarrollando $(1 - u_x^2)^2 x^2 - 2(u_x - u_x^3)u_y xy + u_x^2 u_y^2 y^2 - 2(u_x - u_x^3)u_z xz + 2u_x^2 u_y u_z yz + u_x^2 u_z^2 z^2 + u_x^2 u_y^2 x^2 - 2u_x(u_y - u_y^3)xy + (1 - u_y^2)^2 y^2 + 2u_x u_y^2 u_z xz - 2(u_y - u_y^3)u_z yz + u_y^2 u_z^2 z^2 + u_x^2 u_z^2 x^2 + 2u_x u_y u_z^2 xy + u_y^2 u_z^2 y^2 - 2u_x(u_z - u_z^3)xz - 2u_y(u_z - u_z^3)yz + (1 - u_z^2)^2 z^2 = k^2 x^2 + k^2 y^2 + k^2 z^2$ que al simplificar se tiene lo siguiente $\left((1 - u_x^2)^2 + u_x^2(u_y^2 + u_z^2)\right)x^2 - 2(u_x u_y(2 - u_x^2 - u_y^2 - u_z^2))xy + \left((1 - u_y^2)^2 + u_y^2(u_x^2 + u_z^2)\right)y^2 - 2(u_x u_z(2 - u_x^2 - u_y^2 - u_z^2))xz - 2(u_y u_z(2 - u_x^2 - u_y^2 - u_z^2))yz + \left((1 - u_z^2)^2 + u_z^2(u_x^2 + u_y^2)\right)z^2 = k^2 x^2 + k^2 y^2 + k^2 z^2$, ya que $\|u\|^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$ se tiene $(1 - u_x^2)x^2 - 2u_x u_y xy + (1 - u_y^2)y^2 - 2u_x u_z xz - 2u_y u_z yz + (1 - u_z^2)z^2 = k^2 x^2 + k^2 y^2 + k^2 z^2$ con lo cual se observa que $(1 - u_x^2 - k^2)x^2 - 2u_x u_y xy + (1 - u_y^2 - k^2)y^2 - 2u_x u_z xz - 2u_y u_z yz + (1 - u_z^2 - k^2)z^2 = 0$ que sería la ecuación de la familia de conos con vértice en el origen y cuyo eje está determinado por el vector u , y que en la forma matricial se encuentra dada por

$$\mathcal{C}_{u_1} : P^t \begin{pmatrix} 1 - u_x^2 - k^2 & -u_x u_y & -u_x u_z \\ -u_x u_y & 1 - u_y^2 - k^2 & -u_y u_z \\ -u_x u_z & -u_y u_z & 1 - u_z^2 - k^2 \end{pmatrix} P = 0$$