Geometría Analítica II

Trabajo 21

Prof. Pablo barrera Alumno: Ernesto Velasco Grupo: 4078

Encuentre la ecuación de la esfera que pasa por el círculo

$$\mathcal{C}_1 \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{E}_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ \Pi_1 : 2x + 3y + 4z = 5 \end{array} \right.$$

y además pasa por el origen.

Para encontrar la ecuación de la esfera considerese primero la recta que pasa por el centro de la esfera $\mathcal{E}_1$ y cuyo vector generador es el normal al plano Π_1, con lo que se tiene la recta $\ell_1 : P_1(t) = p_1 + tn_1$ con $P_1 = (0,0,0)$ el centro de la esfera y $n_1 = (2,3,4)$, por lo que el centro de la esfera que se busca, es decir la que pasa por la circunferencia $\mathcal{C}_1$ y el origen tiene centro con coordenadas $P_c = (2t, 3t, 4t)$ para algún valor de t, para encontrar el centro busquemos un punto sobre la circunferencia $\mathcal{C}_1$ para ello hagamos $Y = 0$ que nos da el sistema

$$\begin{array}{c} x^2 + z^2 = 9 \\ 2x + 4z = 5 \end{array}$$

Que al resolver nos da los valores de $x = \frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{31}{2}}$ y $z = 1 + \sqrt{\frac{31}{2}}$ con lo que tenemos un punto $P_0 = \left(\frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{31}{2}}, 0, 1 + \sqrt{\frac{31}{2}}\right)$, ahora solo solo se debe encontrar el punto sobre la recta ℓ_1 que se encuentre a igual distancia del origen que de este punto para ello se debe de cumplir que $d(P_c, P_0) = d(P_c, 0)$ con lo que sustituyendo el que la coordenadas de $P_c = (2t, 3t, 4t)$, se obtiene al resolver que el valor adecuado es $t = \frac{9}{10}$ por lo que $P_c = \left(\frac{9}{5}, \frac{27}{10}, \frac{18}{5}\right)$ es el centro de la esfera que se busca con lo que finalmente se tiene que la ecuación de la esfera que cumple lo requerido es es:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{18}{5}x - \frac{27}{5}y - \frac{36}{5}z = 0$$

2.- Demuestra que los círculos

$$\mathcal{C}_1 \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{E}_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y + 4z - 5 = 0 \\ \Pi_1 : 5y + 6z + 1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\mathcal{C}_2 \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{E}_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 4y + 5z - 6 = 0 \\ \Pi_2 : x + 2y - 7z = 0 \end{array} \right.$$

se encuentran sobre la misma esfera y determine la ecuación de la misma.

Primeramente considerense las rectas formadas por loa vectores normales a cada uno de los planos y que pasan por el centro de cada esfera, por lo que en el caso de Π_1 se tiene que el vector normal a dicho plano es $n_1 = (0, 5, 6)$ y para Π_2 se tiene $n_2 = (1, 2, -7)$, ahora hay que encontrar los centros de las esferas $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ para ello se completan los cuadrados en cada una de las ecuaciones con lo que se obtienen $p_1 = \left(1, -\frac{3}{2}, -2\right)$ y $p_2 = \left(\frac{3}{2}, 2, -\frac{5}{2}\right)$, con lo que se construyen las rectas $\ell_1 : P_1(t) = p_1 + tn_1$ y $\ell_2 : P_2(s) = p_2 + sn_2$, ahora bien si estas circunferencias son parte de una misma esfera la recta que determinan su centro y el vector normal al plano que las produce se deben intersectar, ya que esta recta contiene los centros de todas las esferas que pueden contener a la circunferencia, por lo que si las dos rectas intersectan se debe de cumplir que $P_1(t) = P_2(s)$, con lo que se conforma el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ll} 1) & 1 = \frac{3}{2} + s \\ 2) & -\frac{3}{2} + 5t = 2 + 2s \\ 3) & -2 + 6t = -\frac{5}{2} - 7s \end{array}$$

que se observa aparentemente es un sistema sin soluciones, ya que hay mayor número de ecuaciones que de variables, pero si se resuelve el sistema que forman 1) y 2), con lo que se obtiene valores $t = \frac{1}{2}$ y $s = -\frac{1}{2}$ que al sustituir satisfacen también la ecuación tres, al existir la solución, existe la intersección de estas dos rectas que es el centro de la esfera que contiene a ambas circunferencias ahora solo queda evaluar $P_1\left(\frac{1}{2}\right)$ que da como resultado $P_c(1, 1, 1)$, para finalizar solo se debe encontrar el radio de la esfera, para ello tomemos un punto cualquiera en el círculo $\mathcal{C}_2$ para ello hagamos $z = 0$ que nos da el sistema

$$\begin{array}{c} x^2 + y^2 - 3x - 4y - 6 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{array}$$

que al resolver nos da valores $x = -2\frac{\sqrt{31}-1}{5}$ y $y = \frac{\sqrt{31}-1}{5}$ con lo que se obtiene el punto $R_1\left(-2\frac{\sqrt{31}-1}{5}, \frac{\sqrt{31}-1}{5}, 0\right)$, ya que $r^2 = (d(R_1, P_c))^2$ se tiene que $r^2 = \left(1 + 2\frac{\sqrt{31}-1}{5}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{31}-1}{5}\right)^2 + 1 = 3 + 4\frac{\left(\sqrt{31}-1\right)^2}{25} + 4\frac{\sqrt{31}-1}{5} + \frac{\left(\sqrt{31}-1\right)^2}{25} - 2\frac{\sqrt{31}-1}{5} = 3 + \frac{\left(\sqrt{31}-1\right)^2}{5} + \frac{2\sqrt{31}-2}{5} = 3 + \frac{31-2\sqrt{31}+1}{5} + \frac{2\sqrt{31}-2}{5} = 3 + \frac{30}{5} = 9$ con lo que se obtiene que la ecuación de la esfera que se buscaba es

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$$

o en forma general

$$x^2 + y‘2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$$

3.- Dar consideraciones en general, para que las circunferencias

$$\mathcal{C}_1 \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{E}_1 : x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda x + 2\mu y + 2\nu z + \rho = 0 \\ \Pi_1 : \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \end{array} \right.$$

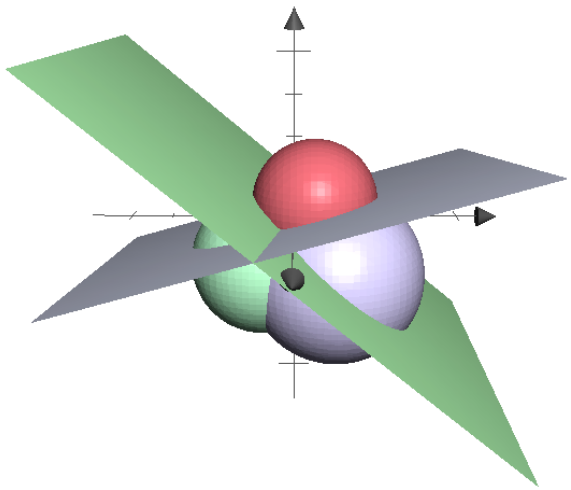

Figura 1: Las esferas y planos que determinan las dos circunferencias, así como la que contiene ambas

$$\mathcal{C}_2 \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{E}_2 : x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda' x + 2\mu' y + 2\nu' z + \rho' = 0 \\ \Pi_2 : \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \delta' \end{array} \right.$$

sean parte de una misma esfera.

Tomando en cuenta como se hizo anteriormente las rectas que pasan por los centros de las respectivas esferas y cuyo vector generador es el normal al plano de corte de cada circunferencia, se obtienen las rectas $\ell_1 : P_1(t) = (-\lambda, -\mu, -\nu) + t(\alpha, \beta, \gamma)$ y $\ell_2 : P_2(s) = (-\lambda', -\mu', -\nu') + s(\alpha', \beta', \gamma')$ que nos dan el sistema de ecuaciones siguiente

$$\begin{array}{ll} 1) & -\lambda + t\alpha = -\lambda' + s\alpha' \\ 2) & -\mu + t\beta = -\mu' + s\beta' \\ 3) & -2 + 6t = -\frac{5}{2} - 7s \end{array}$$

por lo que si estas forman parte de una misma esfera se debe cumplir que existe la intersección de las rectas ℓ_1 y ℓ_2 por lo cual deben existir s y t para los cuales el sistema de ecuaciones escrito anteriormente tiene solución única.