Paulina Pradel Soto **210406**
Geometría Analítica II

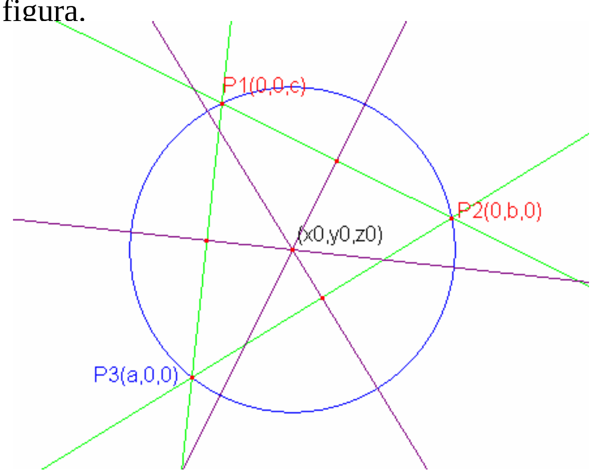
TRABAJO 20

1. Sea la ecuación de un plano $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, en $\Re^3$, encontrar el centro y la ecuación del la esfera circunscrita definida por los puntos del plano que se intersectan con los ejes coordenados, es decir los puntos $(0,0,c),(0,b,0)$, y $(a,0,0)$. Ahora encontrar la familia de esferas que tocan la intersección entre la recta y la esfera original.

Tenemos la ecuación del plano:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

Suponemos al centro de la esfera como la intersección de las mediatrices del triángulo inscrito en el círculo que se forma al intersectar la esfera con el plano, es decir encontramos el circuncentro de este círculo de coordenadas (x_0, y_o, z_0). Podemos ver esto en la siguiente figura.



Definamos las mediatrices de los triángulos por dos puntos, es decir el circuncentro y la normal a la recta formada por los lados del triángulo.
Primero definamos los puntos medios de cada lado del triángulo

$$\text{Para la recta } \overline{P_1P_2}: \left(0,\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)$$

$$\text{Para la recta } \overline{P_2P_3}: \left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},0\right)$$

$$\text{Para la recta } \overline{P_3P_1}: \left(\frac{a}{2},0,\frac{c}{2}\right)$$

Ahora dado que estamos trabajando en R^3, las normales a cada lado del triángulo son infinitas, sin embargo a mi me interesan las normales que se encuentran en el plano $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, es decir que las normales serán las siguientes:

Para la recta $\overline{P_1P_2}$: $\left(a\left(1-\frac{c}{b}-\frac{b}{c}\right),c,b\right)$, estas coordenadas cumplen la ecuación del plano

Para la recta $\overline{P_2P_3}$: $\left(b,a,c\left(1-\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\right)$

Para la recta $\overline{P_3P_1}$: $\left(c,b\left(1-\frac{a}{c}-\frac{c}{a}\right),a\right)$

Ahora para cada una de estas coordenadas podemos obtener las coordenadas del circuncentro:

Para la recta $\overline{P_1P_2}$: $(x_0,y_0,z_0)=\left(0,\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)+t\left(a\left(1-\frac{c}{b}-\frac{b}{c}\right),c,b\right)=\left(ta-ta\frac{c}{b}-ta\frac{b}{c},tc+\frac{b}{2},tb+\frac{c}{2}\right)$

Para la recta $\overline{P_2P_3}$: $(x_0,y_0,z_0)=\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},0\right)+r\left(b,a,c\left(1-\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\right)=\left(rb+\frac{a}{2},ra+\frac{b}{2},rc-rc\frac{a}{b}-rc\frac{b}{a}\right)$

Para la recta $\overline{P_3P_1}$: $(x_0,y_0,z_0)=\left(\frac{a}{2},0,\frac{c}{2}\right)+s\left(c,b\left(1-\frac{a}{c}-\frac{c}{a}\right),a\right)=\left(sc+\frac{a}{2},sb-sb\frac{a}{c}-sb\frac{c}{a},sa+\frac{c}{2}\right)$

podemos encontrar relaciones entre las constantes *t*,*r*,*s* observando cada coordenada, por ejemplo:

$$r=t\frac{c}{a},\quad s=t\frac{b}{a},$$

esto puede servirnos después, sin embargo escojamos al centro de la recta P_1P_2, y sustituyámoslo en la ecuación de la esfera:

$$C:\left[x-\left(ta-ta\frac{c}{b}-ta\frac{b}{c}\right)\right]^2+\left[y-\left(tc+\frac{b}{2}\right)\right]^2+\left[z-\left(tb+\frac{c}{2}\right)\right]^2-r^2=0$$

Ahora si sumamos esta ecuación del círculo con la ecuación de uno de los lados del triángulo obtendremos las ecuaciones de la familia de esferas que toca la intersección de la esfera original con el lado del triángulo escogido.

$$C_1=C+\lambda\overline{P_1P_2}=\left[x-\left(ta-ta\frac{c}{b}-ta\frac{b}{c}\right)\right]^2+\left[y-\left(tc+\frac{b}{2}\right)\right]^2+\left[z-\left(tb+\frac{c}{2}\right)\right]^2-r^2+\lambda\overline{P_1P_2}$$