Geometría Analítica II

Trabajo 20

Prof. Pablo barrera Alumno: Ernesto Velasco Grupo: 4078

Dados los tres puntos en el plano $\Pi_1 : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos de corte de dicho plano con los ejes coordenados, es decir los puntos $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, b, 0)$ y $C = (0, 0, c)$

Para encontrar la ecuación del la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C considerese una de todas las circunferencias que pasan por dichos tres puntos, en este caso yo he tomado aquella que pasa por el origen, por lo que la ecuación de dicha esfera es $\mathcal{C}_1 : x^2+y^2+z^2-ax-by-cz = 0$ completando cuadrados se tiene que $\mathcal{C}_1 : \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{4}$, por lo que el centro de la esfera tiene coordenadas $p_0\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$, si se toma la recta que pasa por el centro de la esfera es perpendicular al plano Π_1, el punto de intersección con dicho plano será el centro de la circunferencia, por lo que la recta que cumple dichas propiedades es $\ell_1 : P(t) = p_0 + tn$ donde n es el vector normal al plano Π_1 por lo que se tiene que $\ell_1 : P(t) = \left(\frac{a}{2} + \frac{t}{a}, \frac{b}{2} + \frac{t}{b}, \frac{c}{2} + \frac{t}{c}\right)$ ahora ya que el punto de intersección sobre le plano Π_1 satisface la ecuación del mismo, se sustituye para obtener el valor de t es decir

$$\frac{\frac{a}{2} + \frac{t}{a}}{a} + \frac{\frac{b}{2} + \frac{t}{b}}{b} + \frac{\frac{c}{2} + \frac{t}{c}}{c} = 1$$

se puede observar es equivalente a $\frac{a}{2a} + \frac{t}{a^2} + \frac{b}{2b} + \frac{t}{b^2} + \frac{c}{2c} + \frac{t}{c^2} = 1$ con lo cual $t\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = -\frac{1}{2}$ por lo que $t = -\frac{a^2b^2c^2}{2(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)}$ de esto se sustituye t en la ecuación paramétrica de la recta para obtener las coordenadas del centro de la circunferencia $P\left(-\frac{a^2b^2c^2}{2(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)}\right) = \left(\frac{a}{2} - \frac{a^2b^2c^2}{2a(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)}, \frac{b}{2} - \frac{a^2b^2c^2}{2b(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)}, \frac{c}{2} - \frac{a^2b^2c^2}{2c(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)}\right)$ por lo que el centro de la circunferencia tiene coordenadas $p_c = \left(\frac{a^3b^2+a^3c^2}{2(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)}, \frac{b^3a^2+b^3c^2}{2(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)}, \frac{c^3a^2+c^3b^2}{2(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)}\right)$ ahora para encontrar el radio, este está dado por $r = d(B, p_c)$, ahora lo adecuado es construir un sistema ortogonal local sobre p_c para ello hay que tomar un vector $p_1 \in \Pi_1$ sea $p_1 = A$ con lo que $p_1 - p_c = (a - x_c, -y_c, -z_c)$ ahora considerese otro vector cualquiera p_2 sobre el plano tal que $(p_1 - p_c) \cdot (p_2 - p_c) = 0$ con lo que $(a - x_c)x - (a - x_c)x_c + y_c^2 + z_c^2 - y_cy - z_cz = 0$ de aqui que $(a - x_c)x - y_cy - z_cz = -y_c^2 - z_c^2 + (a - x_c)x_c$ que se puede ver es un plano si se toma el vector generador de la recta que se produce de la intersección de este con Π_1 se obtiene le vector que se busca por lo que

$$p_2 = \left(-a + \frac{b}{a} \frac{y_c^2 + z_c^2 - (a - x_c)^2}{\frac{a}{b}(a - x_c) + y_c}, b - \frac{b}{c} \frac{y_c^2 + z_c^2 - (a - x_c)\, x_c - b y_c}{-\frac{b}{c} y_c + z_c} - \frac{y_c^2 + z_c^2 - (a - x_c)^2}{\frac{a}{b}(a - x_c) + y_c}, \right.$$

$$\left. \frac{y_c^2 + z_c^2 - (a - x_c)\, x_c - b y_c}{-\frac{b}{c} y_c + z_c} \right)$$

ahora con lo que

$$p_2 - p_c = \left(-a + \frac{b}{a} \frac{y_c^2 + z_c^2 - (a - x_c)^2}{\frac{a}{b}(a - x_c) + y_c} - x_c, b - \frac{b}{c} \frac{y_c^2 + z_c^2 - (a - x_c)\, x_c - b y_c}{-\frac{b}{c} y_c + z_c} - \right.$$

$$\left. \frac{y_c^2 + z_c^2 - (a - x_c)^2}{\frac{a}{b}(a - x_c) + y_c} - y_c, \frac{y_c^2 + z_c^2 - (a - x_c)\, x_c - b y_c}{-\frac{b}{c} y_c + z_c} - z_c \right)$$

con esos dos vectores se puede puede construir la circunferencia normalizando primeramente estos vectores es decir $v_1 = \frac{1}{\|p_1 - p_c\|}(p_1 - p_c)$ y $v_1 = \frac{1}{\|p_2 - p_c\|}(p_2 - p_c)$, ahora con esto todo punto en el plano se puede escribir como $P(\gamma, \delta) = p_c + \gamma v_1 + \delta v_2$ ya que se quiere una circunferencia de radio $r = d(A, p_c)$ se debe cumplir que $\gamma^2 + \delta^2 = r^2$ de lo que se sigue que $\gamma = r \cos\theta$ y $\delta = r \operatorname{sen}\theta$ por lo que se tiene que $P(\gamma, \delta) = p_c + d(A, p_c)\cos\theta v_1 + d(A, p_c)\operatorname{sen}\theta v_2$ por lo que la ecuación del circulo que se busca es

$$P(\theta) = p_c + d(A, p_c)\cos\theta v_1 + d(A, p_c)\operatorname{sen}\theta v_2$$