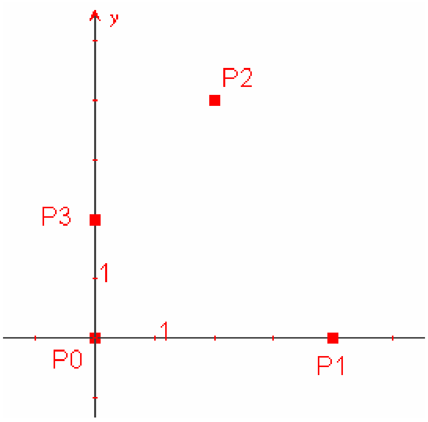
GEOMETRIA ANALITICA II

Profesor: Pablo Barrera Sánchez Fecha de entrega 19 Abril 2006
Alumno: Castañeda Hernández Ricardo

1.- Encuentre la familia de cónicas que pasan por $P_0(0, 0)$, $P_1(4, 0)$, $P_2(2, 4)$, $P_3(0, 2)$,

a) ¿Cuándo la cónica es una elipse?
b) ¿Cuándo la cónica es una hipérbola?
c) ¿Cuándo la cónica es un par de rectas?
d) ¿Cuándo la cónica es una parábola?



- Tomando las cónicas degeneradas formadas por las rectas que pasan por P_0P_1 y P_2P_3, P_0P_3 y P_1P_2, se pueden expresar todas las cónicas que pasan por esos 4 puntos, por tanto tenemos:

$$\lambda_1(\ell_{01}\cdot\ell_{23})+\lambda_2(\ell_{03}\cdot\ell_{12})=0$$

- Como se tienen dos variables lambda, podemos eliminar una de ellas, al dividir todo entre lambda uno, y el cociente de lambda dos entre lambda uno se le nombra lambda, por lo que resulta:

$$\ell_{01}\cdot\ell_{23}+\lambda(\ell_{03}\cdot\ell_{12})=0$$

- Se encuentran las ecuaciones de las cuatro rectas propuestas, que son las siguientes:

$\ell_{01}=y$, $\ell_{23}=x-y+2$, $\ell_{03}=x$, $\ell_{12}=2x+y-8$

- Todas las ecuaciones se sustituyen en la formula que se tenia:

$$y(x-y+2)+\lambda x(2x+y-8)=0$$

$$2\lambda x^2-y^2+(1+\lambda)xy-8\lambda+2y=0$$

- Como esta ecuación no tiene termino independiente, entonces pasa por el origen. De la ecuación resultante se obtiene su matriz, tal que;

$$A=\begin{pmatrix} 2\lambda & \frac{1+\lambda}{2} \\ \frac{1+\lambda}{2} & -1 \end{pmatrix} \qquad DetA=-2\lambda-\frac{(1+\lambda)^2}{4}$$

- A partir de esto la cónica se puede ver de dos maneras diferentes:

$$\lambda^2-traza\lambda+DetA=0, \quad (1)$$
$$(\delta-\delta_1)(\delta-\delta_2)=0, \quad (2)$$

- Como se había comprobado que la ecuación (1) siempre tiene solución, esto se puede representar bajo la ecuación (2), y desarrollando esta ecuación, queda como:

$$\delta^2-\delta(\delta_1+\delta_2)+\delta_1\delta_2=0, \quad (3)$$

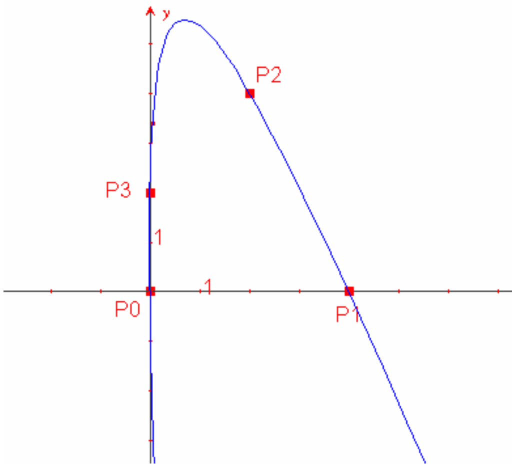
- Como las ecuaciones (1) y (3) son iguales, entonces termino a termino lo deben ser, por lo que se concluye que $DetA=\delta_1\delta_2$
- Por lo que se tiene los casos siguientes :

- Cuando el determinante de A es cero

Lo que significa que $\delta_1\delta_2$ es cero, por tanto $\delta_1 = 0$ ó $\delta_2 = 0$, lo que reduce el problema de los valores propios de la cónica a un termino cuadratico, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix}$, por lo que se obtiene que la cónica es una parabola si y solo si:

$$\frac{-8\lambda - (1+\lambda)^2}{4} = 0 \text{, y esto solo pasa cuando}$$

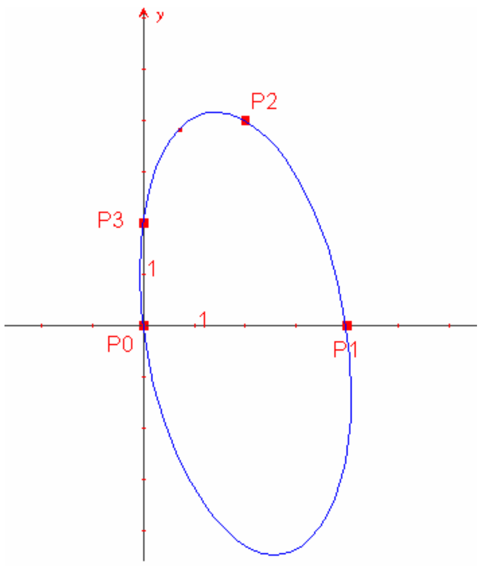
$$\lambda_1 = -5 + \sqrt{24}, \quad \lambda_2 = -5 - \sqrt{24}$$



- Cuando el determinante de A > 0

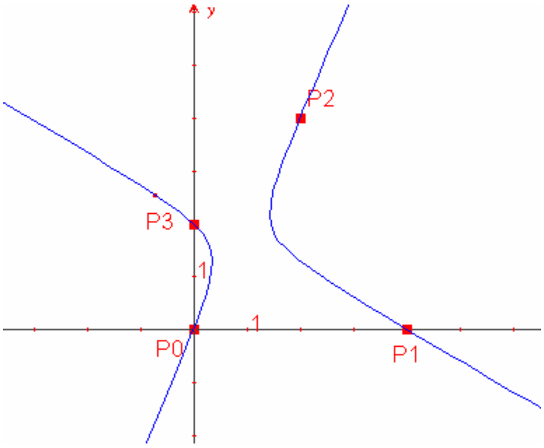
Lo que significa que $\delta_1\delta_2 > 0$, por tanto para los valores propios de la cónica se tiene $\delta_1 > 0$ ó $\delta_2 > 0$, por lo que los semiejes de la cónica o son positivoa o son negativos, de esta manera la cónica adopta una forma de elipse solo en el intervalo

$$\lambda \in (-5 + \sqrt{24}, -5 - \sqrt{24})$$



- Cuando el determinante de A < 0

Supone que $\delta_1\delta_2 < 0$, por tanto los ejes de la cónica son de signo contrario, y esto quiere decir que la cónica es una hipérbola, solo cuando la lambda se encuentre en el intervalo $\lambda \in (-\infty, -5-\sqrt{24}) \cup (-5+\sqrt{24}, \infty)$



- La cónica es un par de rectas solo cuando la ecuación se encuentre de la forma siguiente: $(x'-\alpha)^2-(y'-\beta)^2=0$, con alguna x´, y´, alfa y beta, parea lo cual se podria resolver como $(x'-\alpha)^2=(y'-\beta)^2$, sacar raiz cuadrada y obtener las ecuaciones de dos rectas igualadas, por lo que compartirian un punto. Suponiendo que alfa un termino "y", y beta un termino "x".