Geometría Analítica II

Trabajo 19

Prof. Pablo barrera Alumno: Ernesto Velasco Grupo: 4078

Encuentre la familia de cónicas que pasan por $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (4,0)$, $P_2 = (2,4)$, $P_3 = (0,2)$

Para encontrar la familia de rectas que pasan por los cuatro puntos dados, considerense las siguientes cuatro rectas $\ell_{0,1} : y = 0$, $\ell_{1,2} : 2x + y - 8 = 0$, $\ell_{0,3} : x = 0$, $\ell_{2,3} : x - y + 2 = 0$, por lo que al formar las cónicas que pasan por los cuatro puntos se tienen $\ell_{0,1} \cdot \ell_{2,3}$ y $\ell_{0,3} \cdot \ell_{1,2}$ con lo que se tiene $\mathcal{C}_1(p) : y(y - x - 2) = 0$ y $\mathcal{C}_2(p) : x(2x + y - 8) = 0$ con lo que al estar definida la familia de cónicas que pasan por los cuatro puntos dados como $\mathcal{C}_f(p) : \mathcal{C}_1 + \lambda \mathcal{C}_2 = 0$ es decir $\mathcal{C}_f(p) : y(x - y + 2) + \lambda x(2x + y - 8) = 0$ que al desarrollar se tiene $\mathcal{C}_f(p) : 2\lambda x^2 + xy + \lambda xy - y^2 - 8\lambda x + 2y = 0$ simplificando finalmente se tiene que la familia de cónicas que pasan por los puntos $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (4,0)$, $P_2 = (2,4)$, $P_3 = (0,2)$ esta definida como $\mathcal{C}_f(p) : 2\lambda x^2 + (1 + \lambda) xy - y^2 - 8\lambda x + 2y = 0$, que expresando la cónica en su forma matricial es decir en la forma $\mathcal{C}_f(p) : p^t Ap + 2g^t p + \gamma = 0$ se tiene:

$$\mathcal{C}_f(p) : \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\lambda & \frac{\lambda+1}{2} \\ \frac{\lambda+1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -4\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

a) ¿Cuándo la cónica es una elipse?

Para ello hay que considerar el determinante $b^2 - 4ac$, si se cumple que $b^2 - 4ac < 0$ entonces la cónica será una elipse, sustituyendo los valores de a, b, c se tiene $(1 + \lambda)^2 - 4(2\lambda)(-1) < 0$ desarrollando se tiene $\lambda^2 + 2\lambda + 1 + 8\lambda < 0$ por lo que $\lambda^2 + 10\lambda + 1 < 0$ ahora resolviendo la desigualdad, completando primero el cuadrado se tiene $\lambda^2 + 10\lambda + 25 < 24$ es decir $(\lambda + 5)^2 < 24$ recordando que esto implica que $-\sqrt{24} < \lambda + 5 < \sqrt{24}$ con lo que $-5 - \sqrt{24} < \lambda < -5 + \sqrt{24}$ es el intervalo de los valores de λ en los que la ecuación represntará una elipse. En la imagen 1 se pueden observar algunas elipses generadas al variar el valor de λ dentro de ese intervalo.

b) ¿Cuándo la cónica es una hipérbola?

Nuevamente se debe considerar el determinante, que como se vio está dado por $\lambda^2 + 10\lambda + 1$, para que la cónica sea una hipérbola se debe cumplir que $\lambda^2 + 10\lambda + 1 > 0$ completando cuadrados de manera similar a como se hizo anteriormente se tiene que $(\lambda + 5)^2 > 24$ que

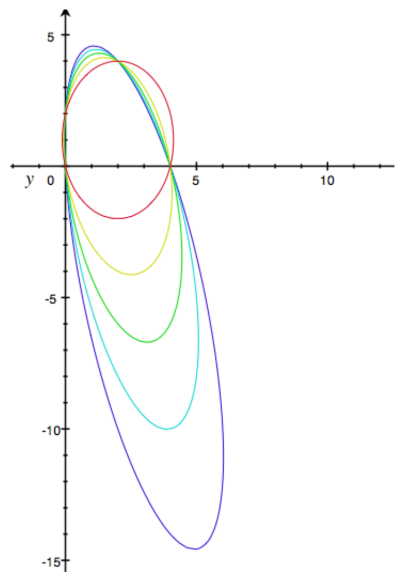

Figura 1: Elipses para cinco valores distintos de λ

esto implica que $-\sqrt{24} > \lambda + 5 > \sqrt{24}$ con lo que el intervalo de los valores de λ en los que la cónica será una hipérbola es $-5 - \sqrt{24} > \lambda > -5 + \sqrt{24}$.

c) ¿Cuándo representa un par de rectas?

Para ello recuerde se que se construyo la familia de cónicas con dos cónicas degeneradas se tiene que $\mathcal{C}_1(p) : y(y - x - 2) = 0$ y $\mathcal{C}_2(p) : x(2x + y - 8) = 0$ son dos casos de la familia de cónicas en las que se representan un par de rectas, añadiendo a su vez las otras dos rectas restantes $\ell_{1,3} : x + 2y - 4 = 0$, $\ell_{0,2} : 2x - y = 0$ se puede construir la cónica degenerada restante que sería $\mathcal{C}_3(p) : (2x - y)(x + 2y - 4) = 0$ que desarrollando se tendrá $\mathcal{C}_3(p) : 2x^2 + 4xy - xy - 2y^2 - 8x + 4y = 0$ que al simplificar equivale a $\mathcal{C}_3(p) : x^2 + \frac{3}{2}xy - y^2 - 4x + 2y = 0$ que se puede observar pertenece a familia de cónicas y el valor de λ que le correspondería en la forma general de la familia es decir $\mathcal{C}_f(p) : 2\lambda x^2 + (1 + \lambda)xy - y^2 - 8\lambda x + 2y = 0$ sería el de $\lambda = \frac{1}{2}$, por lo que los tres casos en los que la cónica es un par de rectas son:

$$\mathcal{C}_1(p) : y(y - x - 2) = 0$$
$$\mathcal{C}_2(p) : x(2x + y - 8) = 0$$
$$\mathcal{C}_3(p) : x^2 + \frac{3}{2}xy - y^2 - 4x + 2y = 0$$

d) ¿Cuándo la es una parábola?

De manea análoga con lo realizado anteriormente, es necesario observar el determinante es decir $\lambda^2 + 10\lambda + 1$ para que la cónica sea una parábola se debe tener que el determianante sea igual a cero, por lo que $\lambda^2 + 10\lambda + 1 = 0$, ahora solo falta resolver la ecuación que nos da los valores de $\lambda_1 = -5 + \sqrt{24}$ y $\lambda_2 = -5 - \sqrt{24}$ que son aquellos valores de λ para los cuales $2\lambda x^2 + (1+\lambda)\,xy - y^2 - 8\lambda x + 2y = 0$ es una parábola por lo que la ecuación de las mismas serian $2\left(-5+\sqrt{24}\right)x^2 + \left(1+\left(-5+\sqrt{24}\right)\right)xy - y^2 - 8\left(-5+\sqrt{24}\right)x + 2y = 0$ y $2\left(-5-\sqrt{24}\right)x^2 + \left(1+\left(-5-\sqrt{24}\right)\right)xy - y^2 - 8\lambda x + 2y = 0$.

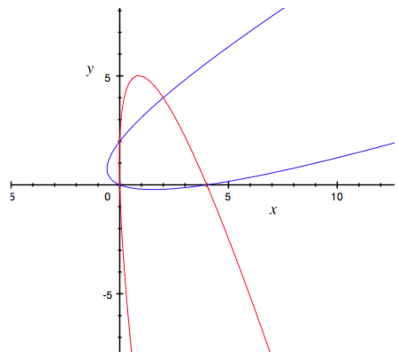

Figura 2: Las dos parábolas que pertenecen a la familia de cónicas