Paulina Pradel Soto **070406**
Geometría Analítica II

TRABAJO 18

1) Hacer los procedimientos vistos en clase para identificar la forma de la cónica e indicar cual es la matriz de cambio de coordenadas para la misma. La ecuación de la cónica es la siguiente:

$$C(p) = (3x - 2y + 4)^2 + (x - y - 1)^2 = 40$$

RESPUESTAS

El procedimiento que seguiremos para encontrar la forma de la cónica es el siguiente:
a) Encontraremos el centro de la cónica si es que existe, b) Diagonalizamos la matriz original haciendo un cambio de coordenadas y resolviendo el problema de los valores propios, c) Construimos la cónica ya transformada.

a) La ecuación de la cónica en su forma matricial es de la siguiente forma:

$$C(p) = p^t Ap + 2g^t p + \gamma$$

Para encontrar el centro de la cónica haremos la siguiente transformación

$$p = \tilde{p} + p_0$$

por consiguiente

$$C(\tilde{p} + p_o) = (\tilde{p} + p_0)^t A(\tilde{p} + p_0) + 2g^t (\tilde{p} + p_0) + \gamma$$

$$C(\tilde{p}) = \tilde{p}^t A\tilde{p} + 2(p_o{}^t A + g^t)\tilde{p} + 2g^t p_0 + p_0{}^t Ap_0 + \gamma$$

Lo que ahora queremos saber es si existe el punto p_0 que es el centro de la cónica. Para ello debemos resolver el sistema $Ap_0=-g$

Ahora en nuestro ejercicio tenemos la siguiente ecuación de la cónica:

$$C(p) = (3x - 2y + 4)^2 + (x - y - 1)^2 = 40$$

Para encontrar el centro de la cónica desarrollemos nuestra ecuación original

$$= 9x^2 + 4y^2 + 16 - 12xy + 24x - 16y + x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x + 2y - 40$$
$$10x^2 + 5y^2 - 14xy + 22x - 14y - 23 = 0$$

donde en la forma matricial tenemos lo siguiente:

$$A=\begin{pmatrix}10 & -7\\ -7 & 5\end{pmatrix},\qquad g=\begin{pmatrix}11\\ -7\end{pmatrix},\quad \gamma=-23$$

Por lo tanto resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix}10 & -7\\ -7 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11\\ 7\end{pmatrix}$$

Y para este sistema encontramos la siguiente solución

$$x_0=-6$$
$$y_0=-7$$

Ahora ya que la solución existe nuestra ecuación bajo la transformación $\tilde{p}$ es la siguiente

$$C(\tilde{p})=\tilde{p}^t A\tilde{p}+g^t p_0+\gamma$$

$$\begin{pmatrix}\tilde{x} & \tilde{y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10 & -7\\ -7 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}11 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\ -7\end{pmatrix}-23=0$$

$$10\tilde{x}^2+5\tilde{y}^2-14xy-40=0$$

Ahora para identificar la forma de la cónica diagonalizamos la matriz A resolviendo el problema de los valores propios, es decir

$$Au=\lambda u$$
$$(A-\lambda I)u=0$$

lo cual implica que $\det(A-\lambda I)=0$, entonces hacemos

$$(A-\lambda I)=\begin{pmatrix}10-\lambda & -7\\ -7 & 5-\lambda\end{pmatrix}$$

entonces el

$$\det(A-\lambda I)=(\lambda-10)(\lambda-5)-49=\lambda^2-15\lambda+1=0$$

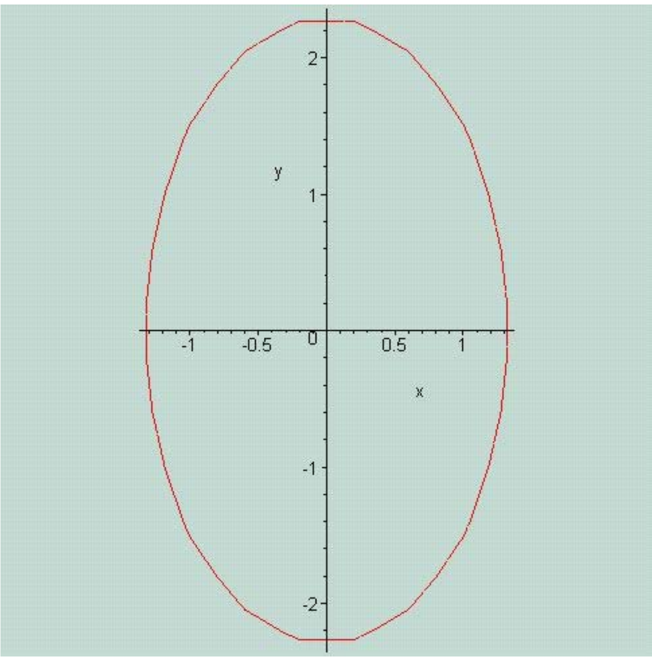
encontramos que las raíces del polinomio característico son:

$$\lambda_1=\frac{15+\sqrt{221}}{2},\lambda_2=\frac{15-\sqrt{221}}{2}$$

Entonces la ecuación de la cónica nos queda como

$$C(p)=\frac{15+\sqrt{221}}{2}\tilde{x}^2+\frac{15-\sqrt{221}}{2}\tilde{y}^2-40=0$$

Podemos ver por la forma de la ecuación anterior que es una elipse. Ahora usando Maple grafiquémosla.



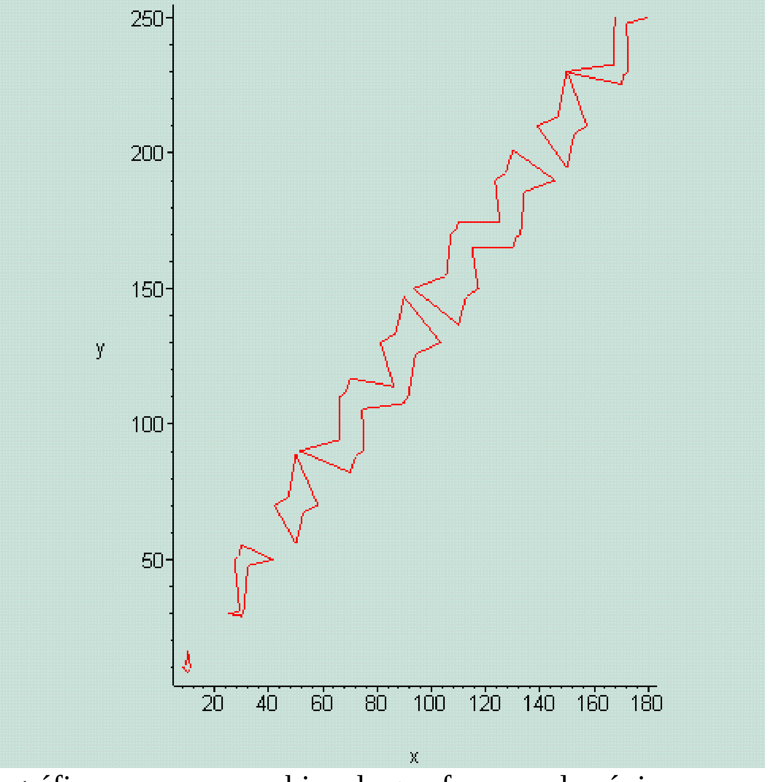
TRABAJO 18a

Ahora usando Maple hagamos lo mismo que hicimos en el ejercicio anteior.

RESPUESTAS:

Primero grafiquemos la cónica original

```
>
> with(plots):
> with(LinearAlgebra):
> implicitplot(10*x^2+5*y^2-14*x*y-22*x-14*y-23=0, x=-
250..250, y=-
250..250,scaling=constrained,axes=normal,style=line);
```



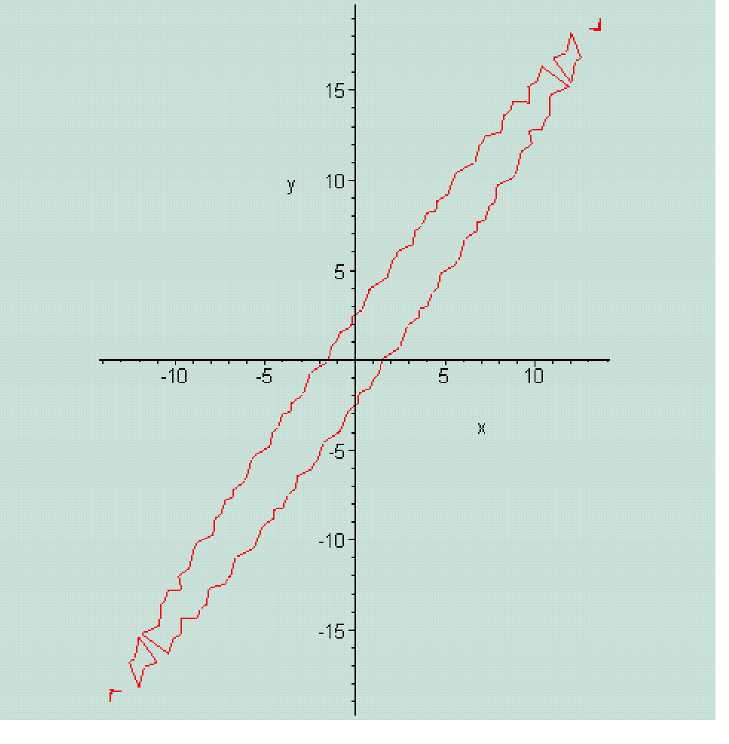
En este caso la gráfica no se ve muy bien de que forma es la cónica, pero usando el tutor de Maple 10 (que no voy a mostrar aqui), nos dice que es una elipse.
Ahora encontremos el centro de la cónica si es que existe. Para ello resolvemos el sistema de ecuaciones

```
> solve( {10*x -7*y = -11, -7*x+5*y = 7}, [x, y] );
```

$$[[x = -6, y = -7]]$$

Grafiquemos la ecuación de la cónica centrada en el punto encontrado

```
> implicitplot(10*x^2+5*y^2-14*x*y-40=0, x=-20..20, y=-20..20,scaling=constrained,axes=normal,style=line,resolution=200);
```



Ahora resolvamos el problema de los valores propios para poder apreciar mejor la forma de la cónica

```
> M:=<<10,-7>|<-7,5>>;
```

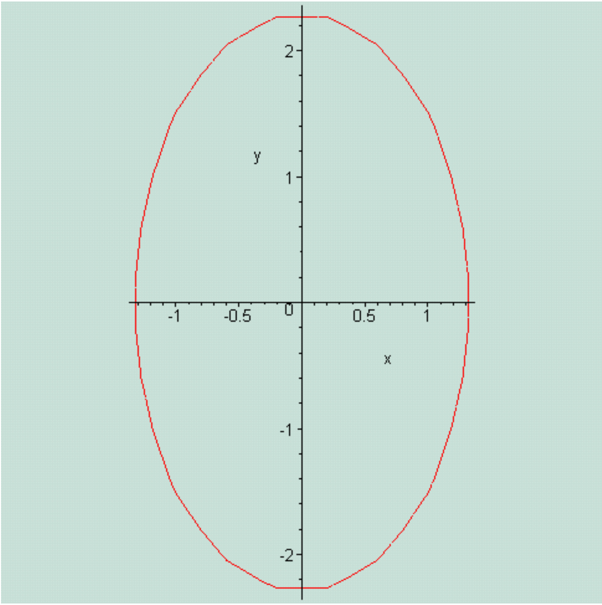
$$M := \begin{bmatrix} 10 & -7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

```
> (lambda,B):Eigenvectors(M);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{15}{2} + \frac{\sqrt{221}}{2} \\ \frac{15}{2} - \frac{\sqrt{221}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{7}{-\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{221}}{2}} & -\frac{7}{-\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{221}}{2}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Grafiquemos la ecuación de la cónica ya tranformada

```
> implicitplot((15+sqrt(221)/2)*x^2+((15-
(sqrt(221))/2))*y^2-40=0, x=-5..5, y=-
5..5,scaling=constrained,axes=normal,style=line,resolution=
200);
```



Aqui si podemos apreciar de una mejor manera la elipse.