Geometría Analítica II

Trabajo 18

Prof. Pablo barrera   Alumno: Ernesto Velasco   Grupo: 4078

Calcular la matriz de cambio de coordenadas para la ccónica con ecuación $10x^2 + 5y^2 - 14xy + 22x - 14x + 17 = 0$

Expresando la cónica en su forma matricial es decir en la forma $\mathcal{C}(p) : p^t Ap + 2g^t p + \gamma = 0$ se tiene:

$$\mathcal{C}(p) : \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -7 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 11 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 17 = 0$$

Lo primero es hacer un cambio de coordendas tales que $p = \tilde{p} - p_0$ al sustituir se tiene $\mathcal{C}(p) : (\tilde{p} - p_0)^t A(\tilde{p} - p_0) + 2g^t(\tilde{p} - p_0) + \gamma = 0$ con lo que se tiene $\mathcal{C}(p) : \tilde{p}^t A\tilde{p} - 2p_0^t A\tilde{p} + 2g^t\tilde{p} - 2g^t p_0 + p_0^t Ap_0 + \gamma = 0$ que para eliminar el termino lineal de cónica nos lleva a resolver el problema $Ap_0 = g$ que usando Maple (ver apartado 18a) para resolver el problema se tiene $p_0(6, 7)$ ya que el problema tiene solución ahora se puede escribir la cónica como $\mathcal{C}(\tilde{p}) : \tilde{p}^t A\tilde{p} + \tilde{\gamma} = 0$ con $\tilde{\gamma} = 0$ con lo que $\mathcal{C}(\tilde{p}) : \tilde{p}^t A\tilde{p} = 0$. Ahora para calcular la matriz de cambio de coordenadas es necesario resolver el problema $Ap = \lambda p$ recordando que anteriormente se habia observado que λ está dada por $\lambda^2 - \text{traza}(A)\lambda + \det(A) = 0$ que para este caso especifico se tiene $\lambda^2 - 15\lambda + 1 = 0$ que al resolver se obtienen los valores $\lambda_1 = \frac{15+\sqrt{221}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{15-\sqrt{221}}{2}$ que al sustituir en nuestro problema en:

$$\begin{array}{c} (10 - \lambda)x - 7y = 0 \\ -7x + (5 - \lambda)y = 0 \end{array} \text{ se tiene } \begin{array}{c} \left(10 - \frac{15+\sqrt{221}}{2}\right)x - 7y = 0 \\ -7x + \left(5 - \frac{15+\sqrt{221}}{2}\right)y = 0 \end{array} \text{ y } \begin{array}{c} \left(10 - \frac{15-\sqrt{221}}{2}\right)x - 7y = 0 \\ -7x + \left(5 - \frac{15-\sqrt{221}}{2}\right)y = 0 \end{array}$$

con lo que se obtiene dos vectores $P_1\left(7, \frac{5-\sqrt{221}}{2}\right)$ y $P_2\left(7, \frac{5+\sqrt{221}}{2}\right)$ que al normalizarlos son los vectores $u_1\left(7\sqrt{\frac{2}{221-5\sqrt{221}}}, \frac{5-\sqrt{221}}{2}\sqrt{\frac{2}{221-5\sqrt{221}}}\right)$ $u_2\left(7\sqrt{\frac{2}{221+5\sqrt{221}}}, \frac{5+\sqrt{221}}{2}\sqrt{\frac{2}{221+5\sqrt{221}}}\right)$ que conforma la matriz B definida como

$$B = \begin{pmatrix} 7\sqrt{\frac{2}{221-5\sqrt{221}}} & 7\sqrt{\frac{2}{221+5\sqrt{221}}} \\ \frac{5-\sqrt{221}}{2}\sqrt{\frac{2}{221-5\sqrt{221}}} & \frac{5+\sqrt{221}}{2}\sqrt{\frac{2}{221+5\sqrt{221}}} \end{pmatrix}$$

Trabajo 18 Apartado 18a

He aqui la secuencia de comandos en la pantalla de Maple junto con los resultados que se usaron para resolver el problema anterior

```
> with(LinearAlgebra);
> A:=<<10,-7>|<-7,5>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} 10 & -7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

```
> G:=<11,-7>;
```

$$G := \begin{bmatrix} 11 \\ -7 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

```
> LinearSolve(A,G);
```

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

```
> cp := CharacteristicPolynomial(A,x);
```

$$cp := x^2 - 15\,x + 1 \qquad (4)$$

```
> solve(cp,x);
```

$$\frac{15}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{221}, \frac{15}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{221} \qquad (5)$$

```
> lambda, B := Eigenvectors(A);
```

$$\lambda, B := \begin{bmatrix} \frac{15}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{221} \\ \frac{15}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{221} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{7}{-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{221}} & -\frac{7}{-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{221}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Figura 1: Comandos y resultados en la pantalla de Maple