Paulina Pradel Soto **310306**
Geometría Analítica II

TRABAJO 16

1) Dada la siguiente ecuación de la cónica

$$x^2 - 4xy + 4x - 2y - 10 = 0$$

reproducir los procedimientos hechos en clase:

a) Encontrar el punto *(x_0, y_0)*, el cual es el centro de la cónica, así como los ejes de la cónica en el sistema coordenado donde se encuentra.
b) Hacer el cambio de coordenadas para los ejes encontrados.
c) Con la información obtenida decir de que forma es la cónica y graficarla.

RESPUESTAS

La ecuación de la cónica en la forma matricial que ya conocemos es la siguiente

$$p^t Ap + 2g^t p + \gamma = 0$$

$$p^t \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} p + 2(2 \quad -1) - 10 = 0$$

Ahora dado que consideramos que la cónica no se encuentra centrada al origen ni paralela a los ejes, es decir podemos decir que se encuentra en otro sistema coordenado, hacemos lo siguiente:

$$p = \tilde{p} - p_0$$

donde $\tilde{p}$ son los puntos de la cónica en el sistema coordenado real (el que todos conocemos) y p_0 es el centro de la cónica en el sistema coordenado donde se encuentra la cónica originalmente.
Ahora sustituimos esto en la ecuación de la cónica, y tenemos

$$(\tilde{p} - p_0)^t A(\tilde{p} - p_o) + 2g^t(\tilde{p} - p_o) - 10 = 0$$
$$\tilde{p}^t A\tilde{p} + 2(-p_o{}^t A + g^t)\tilde{p} - 2g^t p_0 + p_0 Ap_0 - 10 = 0$$

Nos interesa que el término lineal sea cero es decir:

$$-p_0{}^t A + g^t = -A^t p_0 + g = -Ap_0 + g = 0$$

por lo tanto debemos encontrar p_0, tal que $Ap_0 = g$

es decir que para la cónica de nuestro problema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

para este sistema encontramos que

$$x_0 = 1/2$$
$$y_0 = -3/4$$

Hemos encontrado el centro de la cónica en el sistema coordenado, y sustituimos el valor de este punto en los demás términos de la ecuación

$$-2g^t p_0 = -7/2$$
$$p_0{}^t A p_0 = 7/4$$

Ahora hagamos la transformación ya vista $A\bar{u} = \lambda u$, para encontrar los ejes de la cónica así como conocer su forma. Entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ .2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

donde

$$\frac{1-\lambda}{-2} = \frac{-2}{-\lambda}$$

y obtenemos una ecuación cuadrática para los valores de λ. Resolvemos la ecuación y encontramos los valores para λ_1 y λ_2.

$$\lambda^2 - \lambda - 4 = 0$$
$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$$

Ahora sustituimos el valor de λ_1 para encontrar el vector asociado a este valor. Al sustituir encontramos que

$$u_1 = 4, u_2 = 1-\sqrt{17}$$

Pero estamos buscando vectores unitarios por lo tanto hacemos

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 4 \\ 1-\sqrt{17} \end{pmatrix}$$

y buscando que $u_1 + u_2 = 1$

el valor de k es el siguiente

$$k = \frac{1}{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}$$

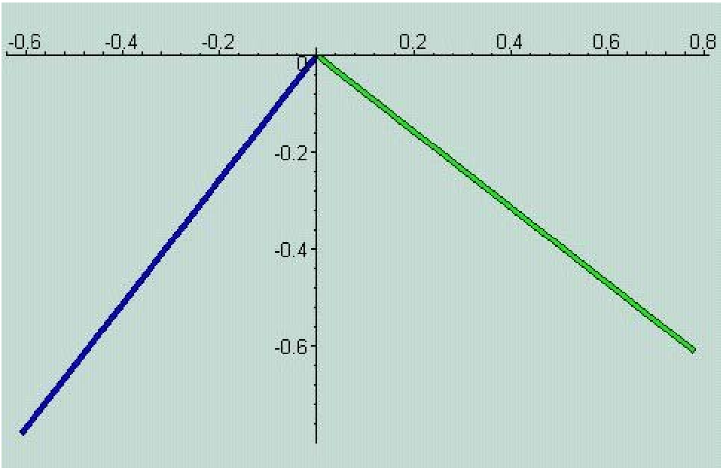
y entonces el vector asociado a λ_1 es el siguiente

$$\hat{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{34-2\sqrt{17}}} \\ \frac{1-\sqrt{17}}{\sqrt{34-2\sqrt{17}}} \end{pmatrix}$$

y el vector asociado a λ_2 debe de ser ortogonal al primero, por lo tanto es el siguiente

$$\hat{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{17}}{\sqrt{34-2\sqrt{17}}} \\ \frac{-4}{\sqrt{34-2\sqrt{17}}} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el dibujo de los ejes trasladados al origen del sistema coordenado real (pero realmente se encuentran centrados en el punto *(x_0,y_0)* es el siguiente:



Ahora hacemos el cambio de coordenadas:

$$\hat{p} = U\tilde{p}$$

donde $U = \langle \overline{u}_1 | \overline{u}_2 \rangle$, los cuales son vectores asociados a λ_1 y a λ_2

Por lo tanto de la transformación me queda que:

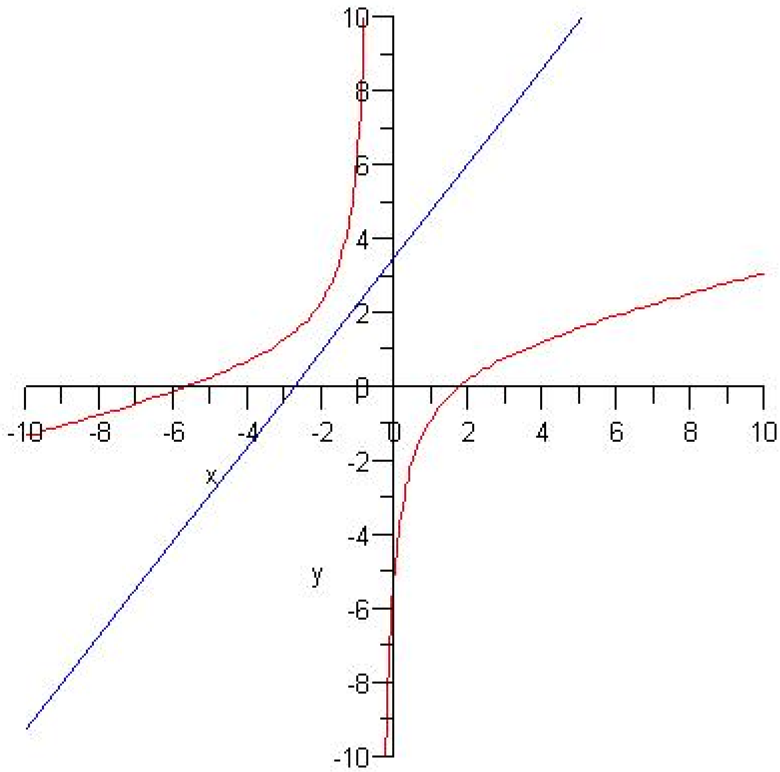
$$\hat{p}^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \hat{p} - \frac{47}{4} = 0$$

y la ecuación de la cónica con el cambio de coordenadas queda como:

$$\lambda_1 \hat{x}^2 + \lambda_2 \hat{y}^2 - {}^{47}\!/_{4} = 0$$

y podemos ver que esta ecuación tiene forma de una hipérbola.

Ahora grafiquemos la ecuación y veamos si nuestra afirmación es correcta:



En efecto tenemos una hipérbola con centro en el punto (1/2,-3/4)