Nombre: Yuritzi Arenas Villarreal
Geometría Analítica II
Profr: Pablo Barrera.

Geometría Analítica II

TRABAJO 16

Prof. Pablo Barrera — Miércoles 29 de marzo, 2006

Para la cónica que hemos estado trabajando,

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$$

Resuelva lo siguiente

1. Encuentre el centro de la cónica.
2. Encuentre la transformación P que diagonaliza a la matriz A, $P^tAP = D$.
3. Observe que la matriz P es ortogonal y su determinante es 1.
4. Transforme la cónica y grafique esta.
5. Indique que representan para la cónica los elementos de la diagonal (los llamados valores propios de A) y que representan para la cónica las columnas de P (los llamados vectores propios).

Fecha de entrega: Viernes 31 de marzo, 2006

Dada la cónica:

$$\mathcal{C}(p): 3x^2+2xy+3y^2+2x+2y-3=0$$

Resuelva lo siguiente:

1. Encuentre el centro de la cónica.

La forma compacta de la cónica $\mathcal{C}(p): \bar{x}^t A x + 2g^t \bar{x} + \gamma = 0$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $g = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \gamma = -3$

Proponemos x_0 como el centro de $\mathcal{C}(p)$.
Transformemos a través de $\bar{x} = \tilde{x} - x_0$ y veamos a la condición que esto nos lleva.

$$(\tilde{x}-x_0)^t A(\tilde{x}-x_0) + 2g^t(\tilde{x}-x_0) - 3 = 0$$

$$(\tilde{x}-x_0)^t [A\tilde{x} - Ax_0] + 2g^t\tilde{x} - 2g^t x_0 - 3 = 0$$

$$\tilde{x}^t A\tilde{x} - \tilde{x}^t A x_0 - x_0^t A x_0 + x_0^t A x_0 + 2g^t\tilde{x} - 2g^t x_0 - 3 = 0$$

$$\tilde{x}^t A\tilde{x} - 2x_0^t A\tilde{x} + 2g^t\tilde{x} - 2g^t x_0 + x_0^t A x_0 - 3 = 0$$

$$\tilde{x}^t A\tilde{x} + \underbrace{\boxed{2(-x_0^t A + g^t)\tilde{x}}}_{0} - 2g^t x_0 + x_0^t A x_0 - 3 = 0$$

$$(-x_0^t A + g^t = 0) \Rightarrow -A^t x_0 + g = 0$$
$$\Rightarrow -Ax_0 + g = 0$$

lo anterior ya que nos interesa el término lineal

i.e. $-2x_0^t A\tilde{x} + 2g^t\tilde{x} = 0 \quad \forall \tilde{x}$

$(x_0^t A - g^t)\tilde{x} = 0$ y como lleva a que

$$\boxed{Ax_0 = g}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x_0 + y_0 &= -1 \\ x_0 + 3y_0 &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 3x_0 + y_0 &= -1 \\ -3x_0 - 9y_0 &= -3 \end{aligned}$$

resolviendo el sistema

$$-8y_0 = -4 \qquad y_0 = -4/-8$$

$\boxed{y_0 = -1/2}$ $\quad 3x_0 + 1/2 = -1$

$x_0 = \dfrac{-1 - 1/2}{3} \Longrightarrow \boxed{x_0 = -1/2}$

$\Longrightarrow x_0 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ centro de la cónica.

② Encuentre la transformación P que diagonaliza a la matriz A, $P^t A P = D$

P.d. $A\bar{u} = \lambda \bar{u} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$(A - \lambda I)U = 0$

$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0,$

$$\boxed{\begin{aligned} &i) \quad (3-\lambda)u_1 + u_2 = 0 \\ &ii) \quad u_1 + (3-\lambda)u_2 = 0 \end{aligned}}$$

El anterior es un sistema homogéneo por lo tanto no me interesan las soluciones triviales. i.e $\bar{u} = (0,0)$.

$\Longrightarrow$ igualando las ecuaciones $\dfrac{(3-\lambda)}{1} = \dfrac{1}{(3-\lambda)}$

$\Longrightarrow (3-\lambda)^2 = 1$

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 1$

$\Longrightarrow \boxed{\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0}$

$\lambda = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4(1)(8)}}{2(1)} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \dfrac{6 \pm 2}{2}$

$\Longrightarrow \boxed{\lambda_1 = 4}$ y $\boxed{\lambda_2 = 2}$

Si tomamos λ_1 tenemos que si sustituimos en i)

$(3-4)U_1 + U_2 = 0$

$\cancel{-U_1 + U_2 = 0}$

$U_1 = -U_2 \Rightarrow U_1 = K$

$U_2 = U_1 \Rightarrow U_2 = K$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$U_1^2 + U_2^2 = 1$

$K^2 + K^2 = 1$

$2K^2 = 1$

$K^2 = 1/2$

$K = \sqrt{1/2}$

$K = 1/\sqrt{2} \Rightarrow \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \overline{U_1}$

Para λ_2 si sustituimos en i)

$(3-2)U_1 + U_2 = 0$

$U_1 + U_2 = 0$

$U_1 = -U_2 \Rightarrow U_1 = -K$

$U_2 = -U_1 \Rightarrow U_2 = -K$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$U_1^2 + U_2^2 = 1$

$(-K)^2 + (-K)^2 = 1$

$K^2 + K^2 = 1$

$2K^2 = 1$

$K^2 = 1/2$

$K = 1/\sqrt{2} \Rightarrow \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \overline{U_2}$

Sea $P = [\overline{U_1} \mid \overline{U_2}] = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$P^t = \left[\begin{array}{c} \overline{U_1} \\ \hline \overline{U_2} \end{array}\right] = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

La matriz P tiene la siguiente característica:

$$P^t A P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4/\sqrt{2} & 2/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{2} & -2/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4/2 + 2/2 & -4/2 - 2/2 \\ -2/2 - 2/2 & 2/2 + 2/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & -2-2 \\ 1-1 & 1+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

i.e. $P^t A P = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = D$ (diagonal)

③ Observe que la matriz es ortogonal y su determinante es 1.
Que una matriz sea ortogonal quiere decir que: $A^t A = I$

p.d. $P^t P = I$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 + 1/2 & 1/2 - 1/2 \\ 1/2 - 1/2 & 1/2 + 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\therefore \underline{P^t P = I}$$

p.d. $\det(P) = 1$

$$|P| = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{vmatrix} = [(1/\sqrt{2})(1/\sqrt{2}) - [(1/\sqrt{2})(-1/\sqrt{2})]$$

$$= \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \underline{1}$$

Lo anterior determina que la matriz es una matriz de rotación $\begin{cases} P^t A P = D \\ P^t A P = I \\ \det(P) = 1 \end{cases}$

④ Transforme la cónica y grafique ésta.

Sea $\tilde{x} = P\hat{x}$ el sistema anterior es $\tilde{x}^t A \tilde{x} + \tilde{\gamma} = 0$

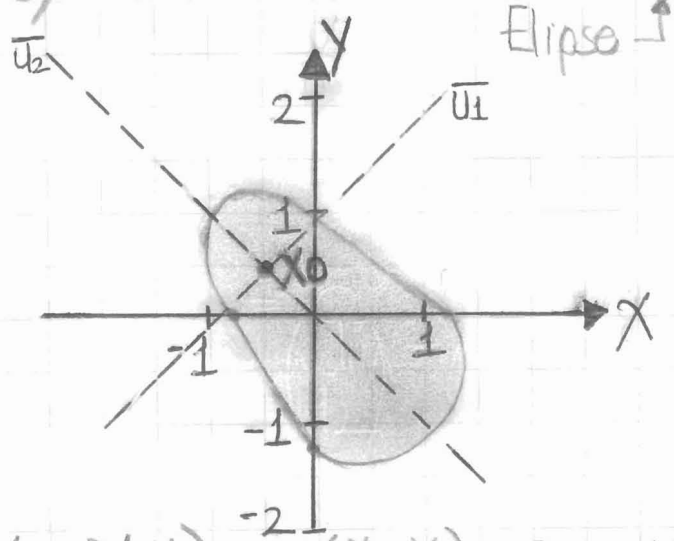
Sustituimos en el sistema a $\tilde{x}$.

$(P\hat{x})^t A P\hat{x} + \tilde{\gamma} = 0$ como $P^t A P = D$ entonces

$x^t D x + \tilde{\gamma} = 0$

Sea $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{4\hat{x}^2 + 2\hat{y}^2 - 4 = 0}$

Elipse



$-2g^t x_0 = -2$

$x_0^t A x_0 = 0$

$\tilde{\gamma} = -2 + 1 - 3 = -4$

$-2g^t x_0 = -2(-1,1)\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = -2(1/2 + 1/2) = -2$ $\quad x_0^t A x_0 = (-1/2, 1/2)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 1$

⑤ Indique que representan para la cónica los elementos de la diagonal (los llamados valores propios de A) y que representan para la cónica las columnas de P (los llamados vectores propios)

$P = [\overline{u_1} | \overline{u_2}] = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Los valores propios de A nos dan información sobre la forma de la cónica i.e. $3x^2 + 2xy + 3y^2$ coeficientes de la ecuación de la cónica de la parte cuadrática.

Los vectores propios de P nos dan información sobre los vectores que determinan los ejes de la cónica i.e. $\overline{u_1}$ y $\overline{u_2}$.