

TRABAJO 15

- 1) En clase vimos algunas transformaciones que modifican un objeto en $\mathbb{R}^2$. En particular vimos la transformación de rotación la cual esta dada por la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Donde θ es el ángulo al cual rotamos nuestro objeto. Diga en que sentido se lleva a cabo la rotación de esta transformación.

- 2) Otra de las transformaciones vistas en clase esta dada por la siguiente expresión,

$$Ap = \lambda p$$

donde encontramos una ecuación cuadrática para poder encontrar los valores de λ , y donde la matriz A , representa los coeficientes de una cónica pero con centro en el origen, es decir:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Para la cónica que hemos usado en los trabajos $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$ (trasladándola al origen), encontrar las soluciones de la ecuación cuadrática para λ , es decir encontrar λ_1 y λ_2 , las cuales representan el tamaño de los semiejes de la cónica. Dibujar la cónica, es decir la transformación aplicada..

- 3) Del problema anterior demostrar que cuando la matriz A es simétrica el problema siempre tiene solución.

RESPUESTAS

- 1) Como sabemos teniendo la transformación dada por la matriz A , podemos rotar un objeto en $\mathbb{R}^2$. Dado que le vamos a aplicar esta transformación a un objeto con coordenadas x y y , obtendremos unas nuevas coordenadas en el plano las cuales serán x' y y' . Es decir que:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta \\ y' &= -x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta \end{aligned}$$

para lo cual las coordenadas originales las podemos expresar como

$$\begin{aligned} x &= r \cos \alpha \\ y &= r \operatorname{sen} \alpha \end{aligned}$$

donde α es el ángulo que forma el vector de coordenadas (x, y) con los ejes coordenados, y r es la norma de ese vector.

Entonces podemos escribir a las coordenadas (x', y') , como

$$\begin{aligned} x' &= r \cos \alpha \cos \theta + r \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \\ y' &= -r \cos \alpha \operatorname{sen} \theta + r \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \end{aligned}$$

y aplicando funciones trigonométricas ya conocidas tenemos que

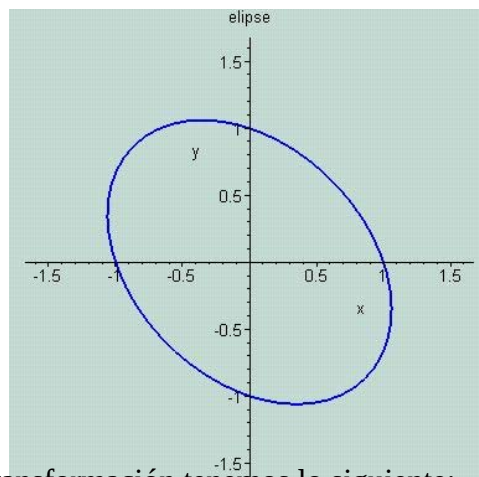
$$\begin{aligned} r \cos(\alpha - \theta) &= x' = r \cos \alpha \cos \theta + r \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \\ r \operatorname{sen}(\alpha - \theta) &= y' = -r \cos \alpha \operatorname{sen} \theta + r \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \end{aligned}$$

Al restarle al ángulo original α el ángulo de rotación θ , es como si estuviéramos moviendo nuestro vector original en el sentido de las manecillas del reloj.

2) Nuestra ecuación de la cónica trasladada al origen es:

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 = 3$$

y dibujada tenemos lo siguiente:



Ahora bien al aplicar la transformación tenemos lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 3 = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y para encontrar el valor de λ , tenemos la siguiente ecuación cuadrática

$$\lambda^2 - (\text{tr}(A))\lambda + \det(A) = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

y al resolver la ecuación tenemos que:

$$\lambda_1 = 4$$

$$\lambda_2 = 2$$