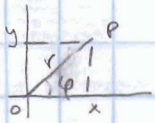
Tarea 15 Geometría Analítica II Gilberto Gómez Correa.

Prof. Pablo Barrera

1. $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $A_p = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta & y\operatorname{sen}\theta \\ -x\operatorname{sen}\theta & y\cos\theta \end{pmatrix}$

Entonces $x' = x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta$; $y' = -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta$



Dado que el $\cos = \frac{C.A}{H}$ y $\operatorname{sen} = \frac{C.O}{H}$ y $x = r\cos\varphi$; $y = r\operatorname{sen}\varphi$

sustituyendo:

$x' = r\cos\varphi\cos\theta + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta = r(\cos\varphi\cos\theta + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta) = r\cos(\varphi - \theta)$

$y' = -r\cos\varphi\operatorname{sen}\theta + r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta = r(\operatorname{sen}\varphi\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\varphi) = r\operatorname{sen}(\varphi - \theta)$

De aquí podemos deducir que A_p gira en el sentido de las manecillas del reloj dado que al ángulo φ se le resta el ángulo θ, lo cual reduce el ángulo original.

2. $Ap = \lambda p$, donde $p = (x, y)^t$ y $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $\lambda^2 - \text{traza}(A)\lambda + \det(A) = 0$ siempre tiene solución

Para demostrar que la ecuación cuadrática tiene solución debemos observar su discriminante

$b^2 - 4ac \longrightarrow (-\text{traza}(A))^2 - 4(1)(\det A)$

$(a+c)^2 - 4(ac - b^2)$

$a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2$

$a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2$

$(a-c)^2 + 4b^2$

Si el discriminante

$dis > 0 \longrightarrow$ tiene 2 soluciones

$dis = 0 \longrightarrow$ tiene 1 solución

$dis < 0 \longrightarrow$ no tiene solución

Como $(a-c)^2$ es siempre una cantidad positiva y $4b^2$ también es siempre una cantidad positiva entonces la ecuación cuadrática $\lambda^2 - \text{traza}(A)\lambda + \det(A) = 0$ siempre tiene solución

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Resolviendo

$\lambda^2 - \text{traza}(A)\cdot\lambda + \det(A) = 0$

$\text{traza}(A) = 6$

$\det(A) = 9 - 1 = 8$

$\lambda = (6 \pm \sqrt{36 - 4(1)(8)})/2$

$= (6 \pm \sqrt{36 - 32})/2$

$= (6 \pm 2)/2$

$\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = 2 \longrightarrow \lambda_1 p = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \end{pmatrix}$

$\lambda_2 p = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

Graficando $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$

$3y^2 + 2y(x+1) + (3x^2 - 2x - 3) = 0$

$y = \left(-2(x+1) \pm \sqrt{4(x+1)^2 - 4(3)(3x^2 - 2x - 3)}\right)/6$

$y = (-2x-2 \pm \sqrt{4x^2 + 8x + 4 - 36x^2 + 24x + 36})/6$

$y = (-2x-2 \pm \sqrt{-32x^2 + 32x + 40})/6$

$x = (-32 \pm \sqrt{32^2 - 4(-32)(40)})/-64$

$= (-32 \pm \sqrt{6144})/-64$

$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6144}}{-64}$

$= \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{6144}{(-64)^2}}$

$= \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}}$

$= \frac{1}{2} - 1.22$

$= -0.72$

$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6144}}{-64}$

$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{6144}{(64)^2}}$

$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}$

$= \frac{1}{2} + 1.22$

$= 1.72$

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$$
$$3x^2 + 2x(y-1) + (3y^2 + 2y - 3) = 0$$

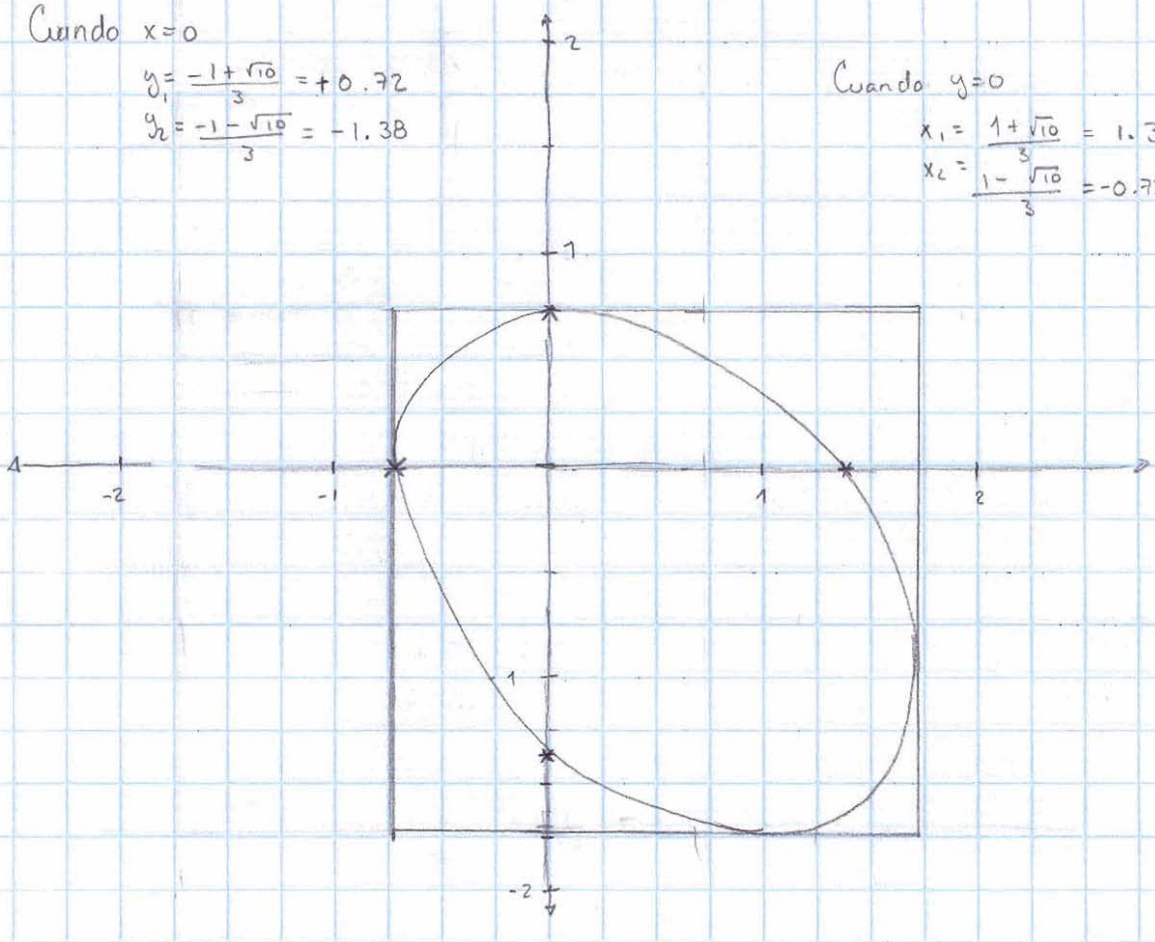
$$x = \left(-2(y-1) \pm \sqrt{4(y-1)^2 - 4(3)(3y^2+2y-3)}\right)/6$$
$$= \left(-2(y-1) \pm \sqrt{4y^2 - 8y + 4 - 36y^2 - 24y + 36}\right)/6$$
$$= \left(-2(y-1) \pm \sqrt{-32y^2 - 32y + 40}\right)/6$$

$$y = \left(32 \pm \sqrt{(-32)^2 - 4(-32)(40)}\right)/-64$$
$$= \left(32 \pm \sqrt{6144}\right)/64$$

$$y_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6144}}{-64} \qquad y_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6144}}{-64}$$
$$= -\frac{1}{2} - 1.22 \qquad = -\frac{1}{2} + 1.22$$
$$= -1.72 \qquad = 0.72$$

Cuando $x = 0$

$$y_1 = \frac{-1+\sqrt{10}}{3} = +0.72$$
$$y_2 = \frac{-1-\sqrt{10}}{3} = -1.38$$

Cuando $y = 0$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{10}}{3} = 1.38$$
$$x_2 = \frac{1-\sqrt{10}}{3} = -0.72$$