

Geometría Analítica II

Trabajo 13

Prof. Pablo barrera

Alumno: Ernesto Velasco

Grupo: 4078

1.- Dado el punto en el espacio $P_0(1, 1, 1)$ y los planos con ecuación cartesiana $\Pi_0 : x + y + z = 1$ y $\Pi_1 : z = 0$ realizar la proyección del P_0 sobre el plano Π_0 y a su vez sobre el plano Π_1 , describa la que sucede con las circunferencia inscrita y circunscrita al triángulo formado por los puntos $Q_0(1, 0, 0)$, $Q_1(0, 1, 0)$ y $Q_2(0, 0, 1)$

Usando que $P_0(1, 1, 1)$ y que para todo punto P_n en el plano Π_0 se cumple que sus coordenadas son $P_n(x_n, y_n, 1 - x_n - y_n)$, sea entonces la recta que pasa por P_0 y P_n es decir:

$$r_n(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \left[\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 - x_n - y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \text{ con lo que } r_n(t) = \begin{pmatrix} t(x_n - 1) + 1 \\ t(y_n - 1) + 1 \\ -t(x_n + y_n) + 1 \end{pmatrix}$$

ahora se desea encontrar $\hat{p}_n$ intersección de la recta $r(t)$ con el plano Π_1 ya que para todo $\hat{p}$ en el plano $z = 0$ se cumple que $\hat{p}(\hat{x}, \hat{y}, 0)$ si se iguala coordenada a coordenada se tiene

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_n \\ \hat{y}_n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t(x_n - 1) + 1 \\ t(y_n - 1) + 1 \\ -t(x_n + y_n) + 1 \end{pmatrix} \text{ por lo que } -t(x_n + y_n) + 1 = 0$$

por lo cual $t = \frac{1}{x_n + y_n}$ que al sustituir se tiene que $\hat{p}_n\left(\frac{2x_n + y_n - 1}{x_n + y_n}, \frac{x_n + 2y_n - 1}{x_n + y_n}, 0\right)$, si de sustituye cada x_n, y_n por $\frac{x_n}{z_n}, \frac{y_n}{z_n}$ se tendrá $\frac{2x_n + y_n - z_n}{x_n + y_n}, \frac{x_n + 2y_n - z_n}{x_n + y_n}$ que al tomar $\frac{2x_n + y_n - z_n}{x_n + y_n} = \frac{\tilde{x}_n}{\tilde{z}_n}$ y $\frac{x_n + 2y_n - z_n}{x_n + y_n} = \frac{\tilde{y}_n}{\tilde{z}_n}$ se tiene $\tilde{x}_n = 2x_n + y_n - z_n, \tilde{y}_n = x_n + 2y_n - z_n$ y $\tilde{z}_n = 2x_n + y_n$ que se puede expresar como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{y}_n \\ \tilde{z}_n \end{bmatrix}$$

en cuanto a lo que ocurre con las circunferencias es que forma dos cónicas en el plano Π_1 , en caso de la circunferencia circunscrita se forman dos ramas de parábola, si se considera el cono que forma el punto P_0 con la circunferencia antes mencionada se forma con el plano Π_0 para delimitar que solo la zona que pasa por ese plano debe ser considerada y a su vez se corta con el plano Π_1 se observará que el corte es dos ramas de parábola, en el caso de la circunferencia inscrita las consideraciones son la misma pero la proyección sobre Π_1 resultará ser una elipse.