Matlab y Cómputo Científico
Práctica 1

Veremos: **una forma elemental de graficar curvas solución de una función implícita**.

Consideremos una ecuación de dos variables de la forma $F(x, y) = 0$. Si (x_0, y_0) es un punto de la curva, nuestra intención es trazar, de acuerdo al teorema de función implícita, la curva en una vecindad de (x_0, y_0). Para lograrlo, fijemos un punto $y = y_0$, y encontremos un punto $x = x_0$ de tal forma que (x_0, y_0) pertenezca a la curva; esto es, para $y = y_0$, $F(x, y_0)$ es una función de x, por lo que $x = x_0$ será un cero de $f(x) = F(x, y_0)$.

Esta es la idea básica para graficar la curva representada en su forma implícita en $F(x, y(x)) = 0$. Ahora veamos cómo implantar esta idea en un algoritmo usando `Matlab` que nos permita trazar puntos de la curva. Primero veamos cómo resolver el subproblema involucrado.

Problema: Encontrar el cero de una función.

Un método numérico para encontrar cero de funciones, es el Método de Newton, que se basa en aproximar la función $f(x)$ por medio de un modelo lineal $m(x)$ en una vecidad de un punto $x = x_0$,

$$m(x) = ax + b \approx f(x)$$

para luego, proceder a resolver el cero del modelo lineal.

Dado un punto $x = x_0$, considerando a la función y su derivada, el modelo lineal obtenido con los primeros términos del desarrollo de Taylor de $f(x)$ alrededor de $x = x_0$, tiene la forma

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

por lo que

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

corta al eje x; es decir, es cero de $m(x)$. Esta será nuestra aproximación al cero de $f(x)$ a partir de x_0. La idea del método de Newton es iterar con el nuevo punto hasta lograr un criterio de paro, lo que es válido para funciones muy suaves. Elabore una rutina `newton.m` para resolver el cero por Newton.

El método de Newton es un método iterativo que converge rápidamente si nos encontramos cerca de la solución, y bajo ciertas condiciones, sobre la derivada y segunda derivada, podemos asegurar convergencia al cero. Este método es iterativo, en el sentido de que partiendo de una aproximación, digamos $x = x_n$, la corregimos para lograr otra

$$x_{n+1} = x_n + r_n$$

donde

$$r_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n))}$$

Nota: Revisar la teoría.
Práctica Recordemos que el teorema de la función implícita nos limita cuando $\partial F/\partial x = 0$ o en su caso $\partial F/\partial y = 0$.

Consideremos la curva dada por $y = x^3$; consideremos la función implícita $F(x, y) = y - x^3$ y grafiquemos. Pensemos que $y = y(x)$ y observemos.

1. Construya una función en `Matlab` con el nombre `fun`, donde se defina la función $f(x) = F(x, y(x))$. Esto es, para un valor de $y = y_0$ buscaremos el cero de $f(x)$. Por lo que $y = y_0$ deberá ser fijo.

2. Construya una función en `Matlab` con el nombre `funder`, donde se defina la derivada de la función $f(x)$.

3. En un programa en `Matlab`, construya una tabla de valores. Para lograrlo, definamos la caja de visualización de la curva, los límites o `axis`. Estos datos los depositaremos en las variables `a, b, c` y `d`. Considere una malla de puntos formada por la intersección de líneas verticales y horizontales, las dimensiones de la malla la denotaremos por `gridx` y `gridy` respectivamente.

4. **Idea:** Considerar cada punto de la malla, como punto inicial para el método de Newton. Si converge, converge a un punto de la curva.

5. Recorramos cada punto de la malla en forma vertical u horizontal, y si el procedimiento de Newton resulta exitoso (`iflag=5`) ese punto lo guardamos en un vector de graficación `pg`.

6. Guarde esos valores y grafíquelos.

Ejercicio

1. Experimente con otras cajas de visualización de la curva.
2. Experimente con distinta dimensión de la malla, es decir, con distinto espaciamiento en y y en x. ¿Qué observa? ¿Una mejor definición de la curva acaso? ¿Cuál es el costo? ¿Cómo podría disminuir ese costo por el número de cálculos?
3. Programe ahora la misma idea de graficación, pero considerando el cero de la función $g(y) = F(x(y), y)$. ¿Qué observa? Se prentan dos gráficas. ¿Cuál es la razón?. Si duda, experimente con distintos parámetros del Método de Newton, tal vez son muy laxos o muy rígidos y por eso se presenta ese fenómeno. ¿Esta fundamentada esta observación?
4. Programe las siguientes funciones implícitas
   (a) $F(x, y) = x^3 + x - y$
   (b) $F(x, y) = x^3 + x + 2 - y^2$
   (c) $x^3 - x + y^3 - y = 1$
   (d) $F(x, y) = (1 - 0.99 \exp(x^2 + y^2))(x^{10} - 1 - y)$