Geometría Analítica II

LECTURA 9

Ayudante: Guilmer González — Día 09 de mayo, 2006

El día de hoy veremos:

0. Comentarios sobre los trabajos últimos.

2. Tirar líneas a una esfera.

1 Tirar íneas

Considere la esfera con centro en el origen y radio $r = 1$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

y el punto $P_0(1, 1, 1)$. El problema es encontrar la ecuación del cono que se forma al "tirar" líneas tangentes a la superficie de la esfera a partir del punto P_0.

Hemos escrito el cono de diferentes formas, una de ellas a través de un sistema local *ad hoc* para el cono, otro a través de sus propiedades geométricas. Veamos la segunda. Un cono se forma al tirar líneas desde un vértice a una curva, en este caso, dado que tiramos líneas tangentes a la esfera desde P_0, es fácil ver que los puntos de tangencia describen una circunferencia sobre la esfera (la idea es sencilla, el plano donde vive el círculo es perpendicular al eje del cono). Observemos quién es el plano de los puntos de tangencia sobre la esfera.

Por una parte, si (x_0, y_0, z_0) es un punto sobre la esfera, el plano tangente a la esfera en ese punto se puede escribir de la forma

$$\Pi_0 : \quad x_0x + y_0y + z_0z = 1$$

Ahora bien, si alguno de esos planos pasan por el vértice del cono, tenemos que

$$x_0 + y_0 + z_0 = 1$$

y (x_0, y_0, z_0) debe un punto sobre la esfera. Por consiguiente, los puntos de tangencia de las líneas del cono son

$$\mathcal{C}: \quad \Pi : x + y + z = 1 \cap \mathcal{E} : x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Vamos a identificar el centro del círculo, para posteriormente, determinar su centro y con ello obtener la constante de proporcionalidad del cono, tal y como hemos venido trabajando hasta el momento.

El eje de cono es la línea que parte del vétice $P_0(1,1,1)$ al centro de la esfera $(0,0,0)$. Esta es posible parametrizarla en la forma $p(t) = t(1,1,1)$. La idea es determinar la intersección de esa recta con el plano Π, ese punto de intersección será el centro del círculo,

$$c_0 = p(t) \cap \Pi$$

esto es, para que valor de t ese punto está en el plano,

$$t + t + t = 1$$

La intersección ocurre en $t = (1/3, 1/3, 1/3)$. Ahora determinemos el radio del círculo. Para esto, necesitamos un punto P_1 en $\mathcal{C}$, esto es que

$$x_1 + y_1 + z_1 = 1 \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1$$

Para este ejemplo, es fácil ver que $(0,1,0)$ se encuentra en el círculo, y al calcular la distancia entre esos puntos obtenemos $\sqrt{6}/3$, su radio.

Ahora bien, volvamos a la ecuación que determina un cono circular en base a las propiedades de proyección. Si P^* es la proyección de un punto P del cono sobre el eje del mismo, tenemos que

$$\|\vec{P_0P} - \vec{P_0P^*}\|^2 = k^2 \|\vec{P_0P^*}\|^2$$

Si P está sobre el cículo que hemos discutido, la proyección sobre el eje del cono es el centro del círculo, por consiguiente, podemos obtener la constante k de porporcionalidad al sustituir en esta última ecuación.

$$\vec{P_0P} = \vec{OP} - \vec{OP_0} = (0,1,0) - (1,1,1) = (-1,0,-1)$$

y

$$\vec{P_0P^*} = \vec{OP^*} - \vec{OP_0} = (1/3,1/3,1/3) - (1,1,1) = (-2/3,-2/3,-2/3)$$

de donde tenemos

$$\|(-1,0,-1)-(1/3,1/3,1/3)\|^2 = k^2\|(-2/3,-2/3,-2/3)\|^2$$

que al sinplificar nos queda

$$k^2 = 1/2$$

Ahora bien, volvamos a la ecuación genérica del cono

$$\|\vec{P_0P} - \vec{P_0P^*}\|^2 = k^2\|\vec{P_0P^*}\|^2$$

donde P es un punto del cono y P^* su proyección sobre el eje del cono.

Procedamos en la forma tradicional. Deseamos calcular el punto o vector proyección de $\vec{P_0P}$ sobre el eje del cono, este está descrito por la recta $p(t) = t(1,1,1)$, normalicemos ese vector dirección, el cual es

$$\vec{\eta} = 1/\sqrt{3}(1,1,1)$$

Como el vector proyección $\vec{P_0P^*}$ está sobre el eje, este se escribe como $\alpha\vec{\eta}$, donde

$$\alpha = \mathrm{P}roy_{\vec{\eta}}\vec{P_0P}$$

esto es

$$\begin{aligned}
\alpha &= \vec{P_0P}\cdot\vec{\eta} \\
&= (x-1,y-1,z-1)\cdot 1/\sqrt{3}(1,1,1) \\
&= 1/\sqrt{3}(x+y+z-3)
\end{aligned}$$

, con esto el vector proyección es

$$\vec{P_0P^*} = 1/\sqrt{3}(x+y+z-3)1/\sqrt{3}(1,1,1)$$

y $\|\vec{P_0P^*}\|^2 = 1/3(x+y+z-3)^2$, con esto la ecuación de cono se escribe como

$$x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz+2x+2y+2z-3$$

`Trace el cono, la esfera, el plano, y la recta usando Maple`.