Geometría Analítica II

LECTURA 8

Ayudante: Guilmer González — Día 25 de abril, 2006

El día de hoy veremos:

0. Comentarios sobre los trabajos últimos.

2. Un círculo en el espacio.

En $\mathbb{R}^2$ ha sido sencillo determinar la ecuación (o ecuaciones que describen un círculo. `Haga una lista de las formas posibles.`

Ahora, en $\mathbb{R}^3$ cómo podemos describir un círculo. Es una figura plana que vive en el espacio. Planteemos el problema de la siguiente forma: Se tiene un plano $\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$ y se da un punto (x_0, y_0, z_0) y un radio r_0. Cómo encontrar la circunferencia con centro (x_0, y_0, z_0) y radio r_0 sobre ese plano.

Ejemplo: Consideremos el plano $\Pi : x + y + z = 1$ y el punto $(1, 1, -1)$ y el radio $r = 1$, construyamos un círculo en ese plano.
Idea: Sobre Π y entorno a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ construyamos un sistema coordenado que nos permita identificar de manera sencilla al círculo.

Consideremos un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ en el plano, esto es $x_1 + y_1 + z_1 = 1$, con esto podemos considerar el vector que parte del centro a ese punto $\vec{P_0P_1} = (x_1 - 1, y_1 - 1, z_1 + 1)$. Tomemos $z_1 = 0$, de la ecuación del plano $x_1 + y_1 = 1$, eligamos $y_0 = 0$, y con esto $x_1 = 1$. Simplememte hemos calculado un punto $P_1(1, 0, 0)$ que vive en Π.

Llamemos $v_1 = \vec{P_0P_1} = (0, -1, 1)$ para este caso. Ahora, construyamos otro vector v_2 que sea ortogonal a v_1. Para eso veamos cómo obtener otro punto $P_2(x_2, y_2, z_2)$ de manera tal que $v_2 = \vec{P_0P_2} = (x_2 - 1, y_2 - 1, z_2 + 1)$ sea ortogonal a $v_1 = (0, -1, 1)$, esto es:

$$
\begin{aligned}
v_2 = (x_2 - 1, y_2 - 1, z_2 + 1) \cdot v_1 = (0, -1, 1) &= 0 \\
-1(y_2 - 1) + (z_2 + 1) &= 0 \\
z_2 - y_2 + 2 &= 0
\end{aligned}
$$

lo que representa una condición para P_2. Ahora bien, P_2 pertenece al plano, por ello se cumple que $x_2 + y_2 + z_2 - 1 = 0$, de estas dos últimas ecuaciones, eliminando y_2, tenemos la relación $x_2 + 2z_2 + 1 =$. Tomemos $z_2 = 0$, así, $x_2 = -1$, y con esto $y_2 = 2$.

Con todo esto, el punto que deseamos es $P_2(-1, 2, 0)$ y el vector que parte de P_0 hacia P_2 es $v_2 = (-2, 1, 1)$.

La colección $\{v_1, v_2\}$ son dos vectores no paralelos, (son ortogonales) y con ello generamos todo el plano, en este caso Π. Con esto, un punto $P \in \Pi$ lo escribimos como

$$\begin{aligned} P &= P_0 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \\ &= (1, 1, -1) + \alpha_1(0, -1, 1) + \alpha_2(-2, 1, 1) \\ &= (1 - 2\alpha_2, 1 - \alpha_1 + \alpha_2, -1 + \alpha_1 + \alpha_2 \end{aligned}$$

Ahora, si normalizamos el sistema

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1) \\ u_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1) \end{aligned}$$

Bajo este sistema normalizado, P lo podemos escribir como

$$\begin{aligned} P &= P_0 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \\ &= (1 - \frac{2}{\sqrt{6}}\alpha_2, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\alpha_2, -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\alpha_2 \end{aligned}$$

y con esto, para que los puntos P se encuentren sobre la circuneferencia, debe observarse que

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

Esto lo justificamos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \|P - P_0\|^2 &= \|\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2\|^2 = r^2 \\ &= \alpha_1^2 \|u_1\|^2 + \alpha_1 u_1 \cdot u_2 + \alpha_2 u_1 \cdot u_2 + \alpha_2^2 \|u_2\|^2 \\ &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = r^2 \end{aligned}$$

Ahora, observemos la forma paramétrica del círculo en el plano tenemos

$$\begin{aligned} x - x_0 &= r\cos\theta \\ y - y_0 &= r\text{sen }\theta \end{aligned}$$

Si pensamos x como α_1 y y como α_2 y (x_0, y_0) el origen, tenemos

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= r\cos\theta \\ \alpha_2 &= r\text{sen }\theta; \qquad r = 1 \end{aligned}$$

y con esto la representación que hemos logrado para el círculo se escribe como

$$\begin{aligned} x &= 1 - \frac{2}{\sqrt{6}}\text{sen }\theta \\ y &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{6}}\text{sen }\theta \\ z &= -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{6}}\text{sen }\theta \end{aligned}$$

Para observar el plano, la circunferencia y una esfera que pasa por ahi, podemos usar las siguientes instrucciones de `Maple`.

```
>with(plots):
Plane1 := implicitplot3d(x+y+z=1, x=-2..2, y=-2..2, z=-2..2,
style=WIREFRAME, color =blue):
Sphere2 := implicitplot3d((x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=1, x=-2..2,
y=-2..2, z=-2..2,color=yellow, style=PATCHNOGRID):
Circle3 := spacecurve([1-2/sqrt(6)*sin(t),1-1/sqrt(2)*cos(t)+1/sqrt(6)*sin(t),
-1+1/sqrt(2)*cos(t)+1/sqrt(6)*sin(t)], t=0..2*Pi, color=black, thickness=2):
display({Plane1,Sphere2, Circle3});
```

Encuentre las proyecciones de este círculo a los planos Π_{XY}, Π_{YZ} y Π_{XZ}.