Geometría Analítica II

LECTURA 7

Ayudante: Guilmer González — Día 04 de abril, 2006

El día de hoy veremos:

0. Comentarios sobre los trabajos últimos.

2. Matrices y la forma cuadrática.

Hasta el momento, hemos hecho una revisión breve de matrices y producto escalar de vectores. Al principio del mes jugamos con transformaciones. Reunamos ambas cosas.
Hemos hecho énfasis en que la ecuación $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ puede escribirse en la forma

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0$$

que escrito de manera compacta

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} + \mathbf{b}^t\mathbf{x} + f = 0$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

aquí $\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ se conoce como la forma cuadrática en dos variables.
Caso 1: $\mathbf{b} = \mathbf{0}$

a) Escriba la ecuación en la forma $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} + f = 0$, donde A es una matriz real y simétrica.

b) Encuentre una matriz P que diagonalice a A de manera tal que $\det(P) = 1$, esto es
$$P^t AP = D$$

c) Sustituya $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ para transformar la ecuación a
$$(\mathbf{x}')^t P^t AP\mathbf{x}' + f = (\mathbf{x}')^t D\mathbf{x}' + f = \alpha(\mathbf{x}')^2 + \beta(\mathbf{y}')^2 + f = 0$$
donde D tiene por entradas en la diagonal α y β.

d) Reagrupe la ecuación última para identificar la cónica.

Observación: Si P es ortogonal y $\det(P) = 1$, entonces P es una rotación

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\ \theta \\ \text{sen}\ \theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Caso 1: $b \neq \mathbf{0}$

De manera análoga al caso anterior, podemos hacer los pasos a) a c), y entonces obtener

$$\alpha(\mathbf{x}')^2 + \beta(\mathbf{y}')^2 + d^t P\mathbf{x}' + f = 0$$

que escrito de manera escalar, tenemos

$$\alpha(\mathbf{x}')^2 + \beta(\mathbf{y}')^2 + c'x' + d'y' + f = 0$$

d) Complete el cuadrado, para obtener

$$\alpha(x' - x_0)^2 + \beta(y' - y_0)^2 = f'$$

e) Haga el cambio $x'' = x' - x_0$, $y'' = y' - y_0$ y reagrupe en la forma canónica de las cónicas.

En 3D, tenemos

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

La idea es similar a 2D: diagonalizar A.

Problemas: Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Diagonalice la matriz.

El problema de diagonalizar la matriz A se puede leer como encontrar una factarización de A en matrices que nos proporcionan información de manera directa. En este caso,

$$D = P^t A P$$

o de manera equivalente, $A = PDP^t$, donde P es una matriz ortonormal. La matriz P no es cualquiera, es aquella que se forma por columnas con los vectores propios $\mathbf{x}$ del problema

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

y D con los valores propios λ. Aplicando pues la transformación $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ obtenemos una cónica (o cuádrica en $mathbbR^3$) elemental, vamos, centrada. Veamos algunos ejemplos típicos.

El pronblema del cálculo de valores y vectores propios

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

se puede escribir de manera elegante como la solución al sistema homogéneo

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

aquí, I es la matriz identidad. Como no estamos interesados en soluciones triviales, lo anterior implica imponer que haya una infinidad de soluciones, esto es

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

para el caso que nos compete

$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-3)(\lambda-1) = 0$$

los valores propios son $\lambda = 3$ y $\lambda = 1$. Los vectores propios se encuentran al resolver el sistema

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

para $\mathbf{x}$. Esas ecuaciones y soluciones son

$$\lambda_1 = 3; \qquad \begin{array}{rcl} -1x_1 - 1x_2 &=& 0 \\ -1x_1 - 1x_2 &=& 0 \end{array}; \qquad \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} k \\ -k \end{pmatrix}.$$

y

$$\lambda_1 = 1; \qquad \begin{array}{rcl} 1x_1 - 1x_2 &=& 0 \\ 1x_1 - 1x_2 &=& 0 \end{array}; \qquad \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} j \\ j \end{pmatrix}.$$

Puede observarse que esos vectores son ortogonales, ya que $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = kj - jk = 0$. Si normalizamos ahora, tendremos los eigenvectores

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

con lo cual ahora, $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ forman un conjunto de vectores ortonormales. Con esos vectores formamos

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

y podemos escribir

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Como P es una matriz ortogonal, $P^{-1} = P^t$. Por otra parte P representa una rotación de 45° en la dirección de las manecillas del reloj.

Ejemplo 2: Diagonalice la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Haciendo las cuentas, llegamos a la ecuación característica $(1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = 0$, la cual tiene por soluciones a los valores propios -1 y 1, pero 1 es de multiplicidad 2, y -1 es simple.

Para resolver las ecuaciones $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para cada λ, veamos cómo hacerlo

$$\lambda_1 = 1; \qquad \begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 + 0x_3 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + 0x_3 & = & 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 & = & 0 \end{array}; \qquad \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} j \\ j \\ k \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_1 = -1; \qquad \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 0x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 2x_3 & = & 0 \end{array}; \qquad \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} r \\ -r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se observa que los vectores propios para λ_1 está formados por dos variables libres, tenemos dos grados de libertad para elegir (se forma un plano de soluciones). Pero de entre los posibles, necesitamos dos ortogonales. Elijamos (por comodidad) $j = 1, k = 0$ y luego $k = 1, j = 0$. Lo cual nos lleva a los vectores

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y a } \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

los cuales son claramente ortogonales. Normalizando esos vectores tenemos

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y a } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ahora, para $\lambda_2 = -1$, el vector normailizado es

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

con lo cual formamos la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y con esto} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = P^t$$

con lo cual hemos escrito

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^t$$