Geometría Analítica II

LECTURA 6

Ayudante: Guilmer González — Día 30 de marzo, 2006

El día de hoy veremos:

0. Comentarios sobre los trabajos últimos.
1. Cónicas, su centro, su forma.

1 Cónicas, su centro

Consideremos el problema de describir la cónica

$$3x^2 + 4xy + 6y^2 - 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y + \frac{2}{7} = 0$$

Obs. La parte lineal nos proporciona información de la posición del centro, la parte cuadrática de su forma.

En forma matricial escribimos

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} + 2\mathbf{g}^t\mathbf{x} + \gamma = 0$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix}; \qquad \gamma = \frac{2}{7}$$

La pregunta es: se trata de una cónica, pero cuál? una hipérbola, una elipse, una parábola, un punto? existen puntos que la representen?

Primero vamos a centrarla, vamos a eliminar el término lineal. Para esto necesitamos aplicar una traslación a la cónica de un punto $\mathbf{x}$ a $\tilde{\mathbf{x}}$. Para lograrlo la cónica debe poder ser escrita de la forma

$$\tilde{\mathbf{x}}^t B\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\gamma} = 0$$

Consideremos la transformación

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0$$

si $\mathbf{x}_0$ es el centro de la cónica, esta transformación nos es útil. Veamos lo que debe ser satisfecho para que esto se cumpla.

Bajo esa transformación observemos la cónica

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^t A\mathbf{x} + 2\mathbf{g}^t\mathbf{x} + \gamma &= 0 \\
&= (\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0)^t A(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0) + 2\mathbf{g}^t(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0) + \frac{2}{7} \\
&= \tilde{\mathbf{x}}^t A\tilde{\mathbf{x}} + 2(-\mathbf{x}_0^t A + \mathbf{g}^t)\mathbf{x} - 2\mathbf{g}^t\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0^t A\mathbf{x}_0 + \frac{2}{7} = 0
\end{aligned}$$

Si $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0$ es una transformación hacia el centro de la cónica, esta representación no debe contener términos lineales, para conseguirlo,

$$(-\mathbf{x}_0^t A + \mathbf{g}^t)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

independiente de $\mathbf{x}$ (para todo elemento $\mathbf{x}$ debe ser satisfecha esa relación), por consiguiente el vector $-\mathbf{x}_0^t A + \mathbf{g}^t$ debe ser el vector cero, esto se escribe en forma elegante como

$$-A\mathbf{x}_0 + \mathbf{g} = \mathbf{0}$$

lo cual es un sistema lineal de ecuaciones

$$A\mathbf{x}_0 = \mathbf{g}$$

Hemos llegado a que si $\mathbf{x}_0$ es el centro de la cónica, $\mathbf{x}_0$ es solución del sistema anterior.

Para el ejemplo que nos compete, el sistema es:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Usemos `Maple` para resolver el sistema

```
> with(LinearAlgebra):

> A:=<<3,2>|<2,6>>;
                              [3  2]
                         A := [    ]
                              [2  6]
> g:= <-sqrt(5),2*sqrt(5)>;
                            [  (1/2) ]
                            [-5      ]
                       g := [        ]
                            [   (1/2)]
                            [2 5     ]
> LinearSolve(A,g);
                         [  5  (1/2)]
                         [- - 5     ]
                         [  7       ]
                         [          ]
                         [ 4  (1/2) ]
                         [ - 5      ]
                         [ 7        ]
```

`Mostrar el programa en clase cómo introducir las intrucciones para resolver sistemas usando Maple, hacer comentarios.`

La solución del sistema es

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7}\sqrt{5} \\ \\ \frac{4}{7}\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Realizando las operaciones en la ecuación transformada, tenemos

```
> -2*DotProduct(g,x0)+ DotProduct(x0,MatrixVectorMultiply(A,x0)) + 2/7;
```

```
- 9
```

$$\tilde{\mathbf{x}}^t A \tilde{\mathbf{x}} - 9 = 0$$

`Hacer algunos comentarios sobre cómo obtener el scalar sin aplicar operaciones matriciales.`

Hasta aquí, hemos obtenido una representación centrada en $\mathbf{x}_0$ de nuestra cónica, pero aun no sabemos la forma que tiene.

2 Cónicas, su forma

Necesitamos transformar esta ecuación en una mejor legible, las cónicas donde A es diagonal nos dan información. Para lograrlo vamos a aplicar una serie de transformaciones lineales simpáticas a A de manera que no alteren la cónica y nos informe de que tipo se trata.

Vamos a resolver el problema que está ligado a esto, y luego interpretemos los resultados para justificar el procedimiento.

Resolvamos el problema

$$A\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$$

este es un sistema de ecuaciones que se escribe en forma homogénea para $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^t$

$$\begin{aligned} (3-\lambda)u_1 + 2u_2 &= 0 \\ 2u_1 + (6-\lambda)u_2 &= 0 \end{aligned}$$

como no estamos interesados en la solución trivial $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, necesitamos que ambas rectas sean paralelas, esto es que se cumpla la condicón

$$\frac{3-\lambda}{2} = \frac{2}{6-\lambda}$$

la cual nos lleva a la cuadrática

$$\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$$

resolviendo, tenemos los valores $\lambda_1 = 7; \lambda_2 = 2$. Usemos el más grande primero. Para $\lambda = 7$, tendremos que el sistema $A\mathbf{u}_1 = \lambda\mathbf{u}_1$ se escribe como

$$-4u_{11} + 2u_{12} = 0$$

o bien,

$$2u_{11} - u_{12} = 0$$

una solución para ese sistema sería $\mathbf{u}_1 = (u_{11} = 1, u_{12} = 2)$, si tomamos entre ellos al vector con norma uno, tenemos

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 2$, el sistema $A\mathbf{u}_2 = \lambda\mathbf{u}_2$ se escribe como

$$u_{21} + 2u_{22} = 0$$

una solución es $\mathbf{u}_2 = (u_{21} = -2, u_{22} = 1)$, y de forma general

$$\mathbf{u}_2 = k(u_{21} = -2, u_{22} = 1)$$

Sin embargo, no estamos interesados en cualquier vector, deseamos que su norma sea 1, para esto normalicemos.

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Con los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$, formemos la matriz P

$$P = [\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Esta matriz es muy simpática, si observamos

$$D = P^t AP = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La transformación $\hat{\mathbf{x}} = P\tilde{\mathbf{x}}$ es la que nos sirve, veamos que

$$\tilde{\mathbf{x}}^t P^t AP\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\gamma} = \hat{\mathbf{x}}^t D\hat{\mathbf{x}} + \hat{\gamma} = \lambda_1 \hat{\mathbf{x}}^2 + \lambda_2 \hat{\mathbf{y}}^2 + \hat{\gamma} = 0$$

Ahora si, ya podemos decir que se trata de una elipse.

Observe que la tranformación P es tal que P que diagonaliza a A de manera tal que $\det(P) = 1$, esto es

$$P^t AP = D$$

esa es la propiedad de P.

Observación: Si P es ortogonal y $\det(P) = 1$, entonces P es una rotación

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen }\theta \\ \text{sen }\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

`Hacer algunos comentarios`

Para nuestro ejemplo, tenemos que

$$7\hat{x} + 2\hat{y} - 9 = 0$$

es una elipse!

La gráfica de la ecuación la podemos obtener fácilmente con `Maple` usando

```
>with(plots):
>implicitplot(3*x^2+4*x*y+6*y^2-2*sqrt(5)*x+4*sqrt(5)*y+2/7=0,x=-1..4,y=-3..2);
```

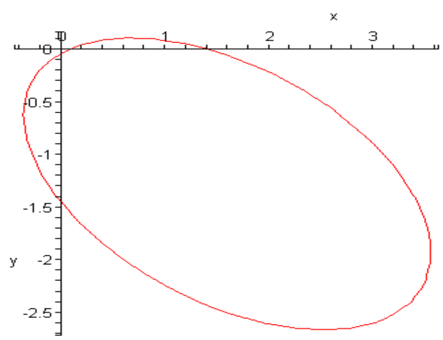

Figura 1: Gráfica de la cónica.