Geometría Analítica II

Lectura 4

Prof: Pablo Barrera Día 15 de marzo, 2006

El día de hoy veremos:

0) Comentarios sobre los trabajos últimos.

1) Cónicas y rectas singulares.

1 Transformaciones

Durante el curso trabajaremos con Transformaciones lineales y afines.

Def. Una transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se dice que es lineal si, para $p, q \in \mathbb{R}^2$

$$T(\alpha p + \beta q) = \alpha T(p) + \beta T(q)$$

Ejemplo: Si A es una matriz, $T(p) = Ap$ es una transformación lineal.

Def. Una transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se dice que es afin, si (manda rectas en rectas), $r = \alpha p + \beta q$, con $\alpha + \beta = 1$

$$T(\alpha p + \beta q) = \alpha T(p) + \beta T(p)$$

Ejemplo: $T(p) = Ap + b$ es una transformación afin. (recordar los cambios de sistemas coordenados vistos en anteriores sesiones).

2 Cónicas y transformaciones afines

A la cónica

$$\mathcal{C}(p) : \ p^t A p + 2p^t g + \gamma = 0$$

le hemos asociado una transformación

$$B(p,q) = p^tAq + p^tg + q^tg + \gamma \tag{1}$$

esta transformación sería lineal, si $\gamma = 0$.

Observemos que, para p_0 un punto cualquiera, consideremos

$$\mathcal{C}_0(p) : \; B(p,p_0) = p^tAp_0 + p^tg + g^tp_0 + \gamma = 0$$

esta es una recta. Ahora bien, si $p_0 \in \mathcal{C}(p)$, entonces $\mathcal{C}_0(p)$ es una recta que pasa por p_0 y es tangente a la cónica $\mathcal{C}(p)$ en p_0.

Propiedad: $B(p,q_0)$ es una transformación afin para q_0.

Esto es, que si α y β son tales que $\alpha + \beta = 1$, entonces

$$B(p, \alpha q_1 + \beta q_2) = \alpha B(p,q_1) + \beta B(p,q_2) \tag{2}$$

Demos un bosquejo de su prueba, desarrollemos el lado izquierdo y juguemos con el hecho de que $\alpha + \beta = 1$

$$\begin{array}{rcl}
B(p,\alpha q_1 + \beta q_2) & = & p^tA(\alpha q_1 + \beta q_2) + p^tg + g^t(\alpha q_1 + \beta q_2) + \gamma \\
& = & \alpha p^tAq_1 + \beta p^tAq_2 + p^tg + \alpha g^tq_1 + \beta g^tq_2 + \gamma \\
& = & \alpha[p^tAq_1 + g^tq_1] + \beta[p^tAq_2 + g^tq_2] + p^tg + \gamma \\
& = & \alpha[p^tAq_1 + g^tq_1 + p^tg + \gamma] + \beta[p^tAq_2 + g^tq_2 + p^tg + \gamma] \\
& + & p^tg + \gamma - \alpha p^tg - \alpha\gamma - \beta p^tg - \beta\gamma \\
& = & \alpha B(p,q_1) + \beta B(p,q_2)
\end{array}$$

En el problema anterior discutimos la ecuación de la cuerda que corta a la cónica en los puntos q_1 y q_2, esta ser escrita de la forma

$$B(p,q_1) + B(p,q_2) = B(q_1,q_2) \tag{3}$$

Ahora bien, entre los puntos q_1 y q_2, tomemos el punto medio

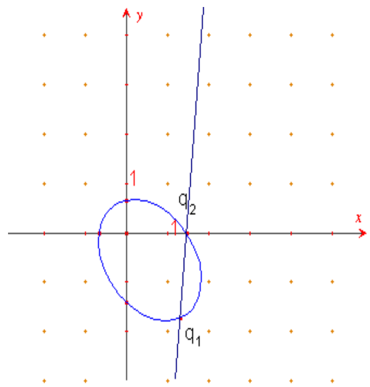

Figura 1: Una cuerda entre dos puntos de la cónica.

$$q_3 = \frac{q_1 + q_2}{2}$$

dado que $B(\cdot, \cdot)$ es afin,

$$\begin{aligned}
B(p, q_3) &= B(p, \frac{q_1 + q_2}{2}) \\
&= \frac{1}{2}B(p, q_1) + \frac{1}{2}B(p, q_2) \\
&= \frac{1}{2}[B(p, q_1) + B(p, q_2)] \qquad \text{pero } q_1, q_2, \text{ se encuentran sobre la cuerda (3)} \\
&= \frac{1}{2}B(q_1, q_2)
\end{aligned}$$

Hemos encontrado una relación del punto medio de la cuerda. Ahora bien, para q_3

$$B(q_3, q_3) = \frac{1}{2}B(q_1, q_2)$$

por consiguiente

$$B(p, q_3) = B(q_3, q_3)$$

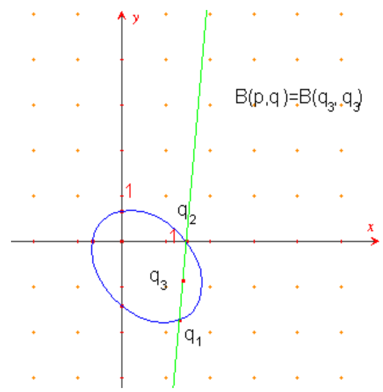

Figura 2: Dado el punto medio de una cuerda, se tiene la ecuación de la cuerda.

Representa a una recta que pasa por el punto medio de una cuerda a la cónica $\mathcal{C}(p)$, con esto si sabemos "trazar" cuerdas podemos encontrar el punto medio, y de contar con el punto medio, podemos describir la cuerda.

Propiedad 1: Qué pasa si $q_1 = q_2$? Ambos puntos se encuentran sobre la cónica, de la ecuación de la cuerda tendremos que

$$\begin{aligned} B(p, q_1) + B(p, q_1) &= B(q_1, q_1) \\ 2B(p, q_1) &= B(q_1, q_1) = 0 \end{aligned}$$

recuerde que como q_1 pertence a la cónica, se cumple que $B(q_1, q_1) = 0$, con esto tendremos la relación

$$B(p, q_1) = 0$$

la cual es la ecuación de la recta tangente de $\mathcal{C}(p)$ en el punto q_1.

Propiedad 2: Pensemos en la intersección de las rectas tangentes a los puntos q_1 y q_2, en notación, si

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \{p |\ B(p, q_1) = 0\} \\ \mathcal{L}_2 &= \{p |\ B(p, q_2) = 0\} \end{aligned}$$

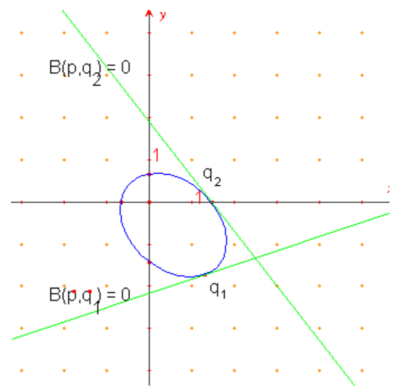

Figura 3: Dada la intersección de las tangentes, se obtiene la recta que pasa por los puntos.

de existir la intersección, si q_3 es ese punto, tendremos que

$$\begin{aligned} B(q_3, q_1) &= 0 \\ B(q_3, q_2) &= 0 \end{aligned}$$

porque q_3 está en $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$, reescribiendo esta relación tenemos

$$\begin{aligned} B(q_1, q_3) &= 0 \\ B(q_2, q_3) &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

se observa que $B(p, q_3) = 0$ es una recta, que pasa por q_1 y q_2 (eso expresan las ecuaciones (4)).

En el problema anterior, para la cónica

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x + 2y = 3$$

encontró los cuatro puntos en que la elipse intersecta a los ejes coordenados. Llamemos p_1 y p_3 a los obtenidos sobre el eje x y p_2 y p_4 a los obtenidos sobre el eje y, bajo la numeración contraria a la manecillas del reloj. Resuelva lo siguiente:

1. Encuentre las rectas tangentes a los cuatro puntos.

2. Determine el punto de intersección de las rectas tangentes a la cónica en p_1 y p_2. De igual forma el punto de intersección de las rectas tangentes a la cónica en p_3 y p_4.

3. El origen del sistema coordenado se encuentra dentro de la elipse. Identifique la recta $B(p, \mathbf{0}) = 0$.