Geometría Analítica II

Lectura 3

Ayudante: Guilmer González   Día 7 de marzo, 2006

El día de hoy veremos:

0) Comentarios sobre los trabajos últimos.

1) Sobre el cambio de coordenadas.

1 Cambio de coordenadas (sin pena de agonía)

Consideremos los puntos $P_0(0,-1)$, $P_1(2,0)$, $P_2(-1,1)$ en el plano. Para la colección $\{P_0, P_1, P_2\}$ tenemos una representación para P. Si contamos con otra colección $\{Q_0, Q_1, Q_2\}$ obtendremos otra representación para el mismo punto. La idea es observar una representación de un conjunto en otro, es decir, hacer un cambio de coordenadas.

Consideremos los tres puntos $P_0(0,-1)$, $P_1(2,0)$ y $P_2(-1,1)$. Usemos vectores para obtener una representación del plano mediante esos puntos. Fijemos un punto O en plano como punto de referencia, usaremos el origen. La idea es representar $\vec{P_0P}$ en términos de $\vec{P_0P_1}$ y $\vec{P_0P_2}$.

Para lograrlo esto, observemos a $\vec{P_0P}$ como suma de vectores

$$\begin{aligned} \vec{P_0P} &= \vec{P_0O} + \vec{OP} \\ &= (0,1) + (x,y) \\ &= (x, y+1) \end{aligned}$$

el cual podemos expresarlo como combinación lineal entre $\vec{P_0P_1}$ y $\vec{P_0P_2}$, estos generan el espacio

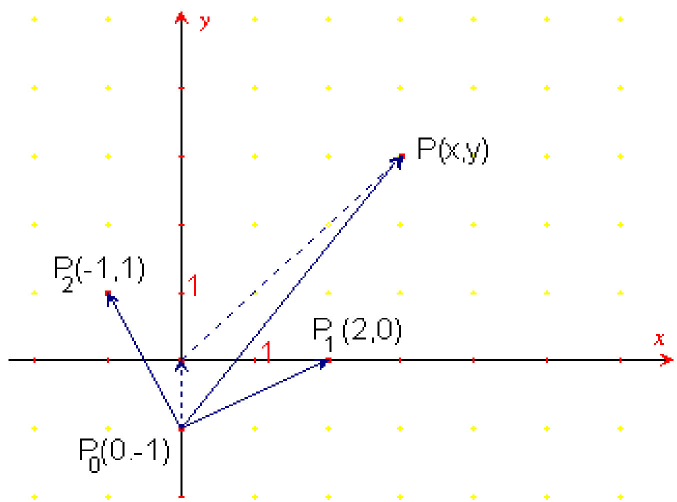

Figura 1: Un sistema de referencia para P.

$$
\begin{aligned}
(x, y+1) &= \alpha \vec{P_0 P_1} + \beta \vec{P_0 P_2} \\
&= \alpha(2,1) + \beta(-1,2) \\
&= (2\alpha - \beta, \alpha + 2\beta)
\end{aligned}
$$

con esto, logramos el sistema

$$
\begin{aligned}
x &= 2\alpha - \beta \\
y &= \alpha + 2\beta - 1
\end{aligned}
$$

Resolviendo para α y β tenemos

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 2/5x + 1/5y + 1/5 \\
\beta &= -1/5x + 2/5y + 2/5
\end{aligned}
$$

esto nos permite pasar de un sistema de coordenadas a otro de manera adecuada. Es decir, si tenemos la posición de $P(x, y)$, tenemos los valores correspondientes en el sistema $\{\vec{P_0P_1}, \vec{P_0P_2}\}$, y si naturalmente contamos con los valores de α y β, contamos con un punto en ese sistema.

Ahora, observemos una representación para P, en $\{Q_0, Q_1, Q_2\}$, para $Q_0(2,2)$, $Q_1(-1,4)$ y $Q_2(0,-3)$. Para luego observar una representación de un conjunto en otro.

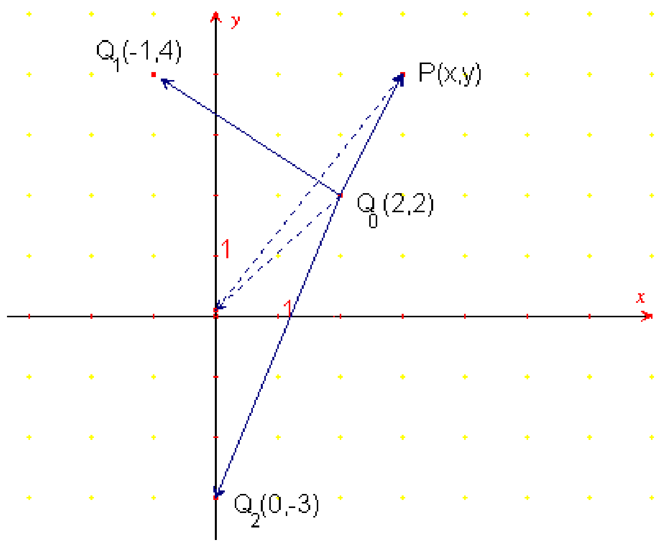

Figura 2: Otro sistema de referencia para P.

De nueva cuenta, representamos $\vec{OP}$ como

$$
\begin{aligned}
\vec{Q_0P} &= \vec{Q_0O} + \vec{OP} \\
&= (-2,-2) + (x,y) \\
&= (x-2, y-2) \\
&= \alpha_1 \vec{Q_0Q_1} + \beta_1 \vec{Q_0Q_2} \\
&= \alpha_1(-3,2) + \beta_1(-2,-5) \\
&= (-3\alpha_1 - 2\beta_1, 2\alpha_1 - 5\beta_1)
\end{aligned}
$$

obteniendo el sistema

$$
\begin{aligned}
x &= -3\alpha_1 - 2\beta_1 + 2 \\
y &= 2\alpha_1 - 5\beta_1 + 2
\end{aligned}
$$

El cual podemos resolver para α_1 y β_1, y con esto, si contamos con la posición de $P(x, y)$, tenemos los valores correspondientes en el sistema coordenado $\{\vec{Q_0Q_1}, \vec{Q_0Q_2}\}$.

Ahora bien, si observamos nuestra representación para P en el primer sistema, observamos que

$$
\begin{aligned}
\beta &= -1/5x + 2/5y + 2/5 \\
\alpha &= 2/5x + 1/5y + 1/5
\end{aligned}
$$

sustituyendo P en la representación de las $Q's$, tendremos

$$
\begin{aligned}
\beta &= -1/5(3\alpha_1 - 2\beta_1 + 2) + 2/5(2\alpha_1 - 5\beta_1 + 2) + 2/5 \\
\alpha &= 2/5(-3\alpha_1 - 2\beta_1 + 2) + 1/5(2\alpha_1 - 5\beta_1 + 2) + 1/5
\end{aligned}
$$

así

$$
\begin{aligned}
\beta &= 7/5\alpha_1 - 8/5\beta_1 + 4/5 \\
\alpha &= -4/5\alpha_1 - 9/5\beta_1 + 7/5
\end{aligned}
$$

Esto lo que significa es que si conocemos un punto en el sistema de las $Q's$, podemos conocer su representación en el sistema de las $P's$.

Y naturalmente, si podemos resolver para α_1 y β_1, entonces podemos pasar de un sistema de referencia a otro.

Ahora, observemos una interpretación a lo que estamos haciendo. Fijemos el valor de α, digamos $\alpha = 1$ y barramos β en el sistema de coordenadas para P en término de los vectores $\{\vec{P_0P_1}, \vec{P_0P_2}\}$, qué significado le damos,

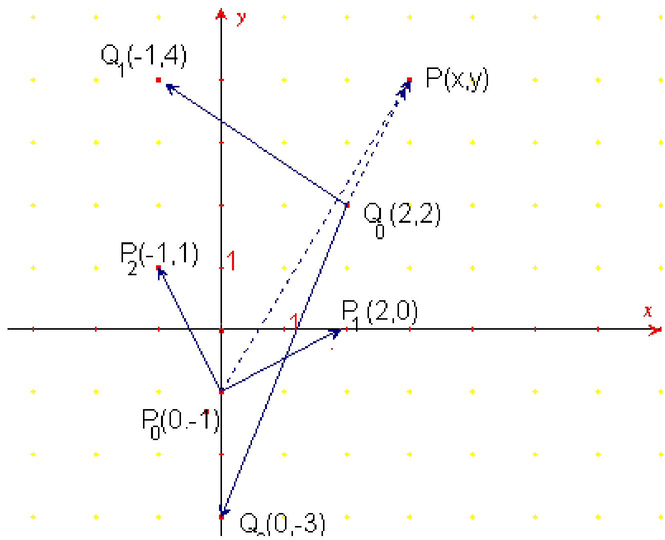

Figura 3: Dos sistemas de referencia para P.

cuando fijamos un valor de α? `Preguntar a la clase, trazar rectas de referencia`.

Ahora que hemos fijado a α, observemos un valor para β, digamos -1. El punto P cómo queda representado en el sistema de referencia $\{\overrightarrow{Q_0Q_1}, \overrightarrow{Q_0Q_2}\}$? `Preguntar a la clase, hacer comentarios, trazar rectas`.

Ahora, observemos cómo es transformado el espacio ”visto” por $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}\}$ al espacio “visto” por $\{\overrightarrow{Q_0Q_1}, \overrightarrow{Q_0Q_2}\}$.

`Hacer algunos comentarios`