Geometría Analítica II
LECTURA 2

Ayudante: Guilmer González — Día 16 de febrero, 2006

El día de hoy veremos:

1. Forma paramétrica de una recta.
2. Noción de distancia y cómo calcular la distancia entre dos líneas.
3. Algunos ejercicios sobre lugares geométricos.

1 Forma paramétrica de una línea

En $2D$ observamos que requerimos de un vector $\vec{a}$, el llamado vector de dirección y un punto Q sobre la recta para describir, mediante un parámetro α, los puntos P sobre la línea.

$$P = Q + \alpha\vec{a}$$

De manera práctica, podemos describir la línea que pasa por dos puntos de la siguiente forma:

> Sean P y Q dos puntos sobre una línea. $\vec{PQ} = Q - P$, es un vector que parte de P hacia Q. $t(Q-P)$ es un vector t veces $\vec{PQ}$.
>
> $$P + t(Q - P)$$
>
> para $-\infty < t < \infty$, describe la línea que pasa por P y Q.

Esta es la forma en que hemos trabajado la descripción de los puntos sobre una línea.

Una observación importante, es que esta representación de la línea que pasa por dos puntos, es independiente de la dimensión del problema. Trabaja tanto para 2D como para 3D, ye en general en $\mathbb{R}^n$.

Como observación, si el parámetro t es tal que $0 \leq t \leq 1$, tenemos una describición para los puntos que se encuentran entre P y Q.

Ejercicio: Describa lo puntos de la recta que pasan por $A(1,2,1)$ y $B(3,1,4)$.

2 Distancia entre dos rectas

Hemos aprendido a calcular distancia de un punto a una recta, y hacia un segmento de recta. Llegamos a una representación inmediata para la distancia de entre dos figuras F_1 y F_2

$$d(F_1, F_2) = \min_{P \in F_1\ Q \in F_2} d(P, Q)$$

Un caso particular que nos compete, es el cálculo de la distancia entre dos rectas. Este es un problema muy interesante ya que desde un punto de vista computacional y práctico, es importante saber en qué momento dos puntos que siguen una trayectoria estarán lo más cercano posible. Esos puntos pueden representar barcos moviendose en cierta dirección o naves o aviones en distintos planos.

Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, nuestras rectas. Consideremos la forma vectorial de representar una recta; sea P_0 un punto de la recta $\mathcal{L}_1$, y Q_0 de la recta $\mathcal{L}_2$. Sea $\vec{u}$, el vector de dirección de la recta $\mathcal{L}_1$ y $\vec{v}$ el de la recta $\mathcal{L}_2$, con esto tenemos que

$$\begin{array}{rcl} P(s) & = & P_0 + s\vec{u}; \quad s \in \mathbb{R} \\ Q(t) & = & Q_0 + t\vec{v}; \quad t \in \mathbb{R} \end{array}$$

$P(s)$ describe la línea $\mathcal{L}_1$ y $Q(t)$ describe la línea $\mathcal{L}_2$.

Consideremos $\vec{w}(s,t)$ el vector que va de un punto $Q(t)$ de $\mathcal{L}_2$ a un punto $P(s)$ en $\mathcal{L}_1$. La idea primera es encontrar $\vec{w}(s_c, t_c)$ que minimicen la magnitud de $\vec{w}(s,t)$, para cuales quiera s y t.

$$d(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \min_{s,t} |\vec{w}(s,t)|$$

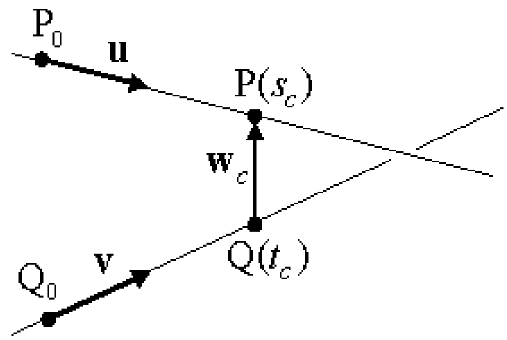

Figura 1: Distancia entre dos rectas, en 3D.

En la Lectura 11, del semestre pasado describimos un algoritmo para calcular la distancia entre dos rectas. En esa lectura usamos las propiedades que nos conducen a vector de distancia mínima, y a partir de ello obtuvimos su representación.

3 Ejercicios

1. Considere dos par de rectas es su forma explícita:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &: \vec{q}(t) = \vec{p}_0 + t\vec{a}_0 \\ \mathcal{L}_1 &: \vec{r}(s) = \vec{p}_1 + s\vec{a}_1 \end{aligned}$$

   (a) ¿Cómo podemos saber si $\mathcal{L}_0 \parallel \mathcal{L}_1$?

   (b) ¿Cómo podemos saber si $\mathcal{L}_0 \perp \mathcal{L}_1$?

2. Considere dos par de rectas es su forma implícita:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &: \vec{n}_0 \cdot (p - p_0) = 0 \\ \mathcal{L}_1 &: \vec{n}_1 \cdot (p - p_1) = 0 \end{aligned}$$

(a) ¿Cómo podemos saber si $\mathcal{L}_0 \parallel \mathcal{L}_1$?

(b) ¿Cómo podemos saber si $\mathcal{L}_0 \perp \mathcal{L}_1$?

3. Lugares geométricos. Describa los siguientes lugares geométricos.

(a) $\mathcal{S} = \{p |\ d(p, \text{eje } x) + d(p, \text{eje } y) = 4\}$

(b) $\mathcal{S} = \left\{p |\ d(p, y = \frac{1}{2}x) + d(p, y = -\frac{1}{2}x) = \text{cte.}\right\}$

(c) $\mathcal{S} = \{p |\ d(p, \text{semicírculo de radio } 2) = 1\}$

(d) $\mathcal{S} = \{p |\ d(p, \mathcal{C}((0,0),4)) = d(p,(0,10))\}$

4. Problemas del examen final del semestre anterior.