Geometría Analítica II

LECTURA 11

Ayudante: Guilmer González   Día 27 de mayo, 2006

El día de hoy veremos:

1. Comentarios sobre el examen.
2. Parchando superficies (hiperboloides, conos...).

Considere el hiperboloide

$$\mathcal{H} = \left\{(x, y, z) |\, x^2 + y^2 - 9z^2 = 1\right\}$$

el cual lo podemos escribir en la forma de diferencia de cuadrados

$$y^2 - 9z^2 = 1 - x^2$$

el cual, factorizando obtenemos

$$(y - 3z)(y + 3z) = (1 - x)(1 + x) \tag{1}$$

Idea: igualemos factores, uno con uno y el otro con el otro, esto nos conduce a dos planos

$$\begin{aligned} y - 3z = 1 + x &\quad : \quad \Pi_1 \\ y + 3z = 1 - x &\quad : \quad \Pi_2 \end{aligned}$$

Ahora bien, se sigue el argumento: los puntos que se encuentren en ambos planos satisfacen la ecuación (1), y por consiguiente están en el hiperboloide, es decir, la recta de intersección de los planos Π_1 y Π_2 se encuentra en el hiperboloide.

Esta idea la podemos extender, podemos generar una familia de planos de manera que el producto adecuado satisfaga (1), por ejemplo

$$
\begin{aligned}
y - 3z &= \lambda(1+x) \\
y + 3z &= \frac{1}{\lambda}(1-x)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

pcon λ real; para cada valor de λ tendremos dos planos, cuya intersección (la línea) está dentro del hiperboloide. Ahora bien, la elección de factores en (1) a igualar puede ser distinta, y esa otra opción, nos produce otra familia de rectas determinadas por los planos

$$
\begin{aligned}
y - 3z &= \mu(1-x) \\
y + 3z &= \frac{1}{\mu}(1+x)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

de manera que para cada μ obtenemos una recta dentro del hiperboloide.

Ahora tratemos de observar al hiperboloide en términos de los parámetros λ y μ, ya que la intersección de las rectas (2) y (3) es un punto.

De (2) y (3) al igualar el término $y - 3z$, tenemos

$$\lambda(1+x) = \mu(1-x) = y - 3z$$

al despejar

$$
\begin{aligned}
\lambda(1+x) &= \mu(1-x) \\
\lambda + x\lambda &= \mu - x\mu \\
x(\lambda+\mu) &= \mu - \lambda
\end{aligned}
$$

con esto

$$x = \frac{\mu - \lambda}{\lambda + \mu}$$

de ambas ecuaciones (2) y (3), llegamos a la relación

$$\begin{aligned} y - 3z &= \lambda(1+x) \\ y + 3z &= \frac{1}{\mu}(1+x) \end{aligned}$$

de donde

$$2y = (1+x)\frac{\lambda\mu + 1}{\mu}$$

esto es

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(1 + \frac{\mu - \lambda}{\lambda + \mu})\frac{\lambda\mu + 1}{\mu} \\ &= \frac{1}{2}(\frac{\lambda + \mu + \mu - \lambda}{\lambda + \mu})\frac{\lambda\mu + 1}{\mu} \\ &= \frac{1}{2}(\frac{2\mu}{\lambda + \mu})\frac{\lambda\mu + 1}{\mu} \\ &= \frac{\lambda\mu + 1}{\lambda + \mu} \end{aligned}$$

hemos expresado a y en términos de λ y μ, hagamos lo propio con z. De $y - 3z = \lambda(1+x)$, de la ecuación (2) con lo que tenemos

$$\begin{aligned} -3z &= \lambda(1+x) - y \\ &= \lambda(1 + \frac{\mu - \lambda}{\lambda + \mu}) - \frac{\lambda\mu + 1}{\lambda + \mu} \\ &= \lambda\frac{2\mu}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda\mu + 1}{\lambda + \mu} \\ &= \frac{2\lambda\mu - \lambda\mu - 1}{\lambda + \mu} \\ &= \frac{\lambda\mu - 1}{\lambda + \mu} \end{aligned}$$

con lo que obtenemos:

$$z = -\frac{1}{3}\frac{\lambda\mu - 1}{\lambda + \mu}$$

Así, hemos encontrado una parametrización del hiperboloide, definida sobre el plano de referencia $\lambda - \mu$, hacia la superficie dada por

$$\begin{aligned} x &= \frac{\mu - \lambda}{\lambda + \mu} \\ y &= \frac{\lambda\mu + 1}{\lambda + \mu} \\ z &= -\frac{1}{3}\frac{\lambda\mu - 1}{\lambda + \mu} \end{aligned}$$

en `Maple` podemos observar el parche en una sección para $[0.2, 2] \times [0.2, 2]$:

```
> with(plots):
>hiperb:=implicitplot3d(x^2+y^2-9*z^2=1,x=-5..5, y=-5..5, z=-5..5,
style=WIREFRAME, color=green,grid=[35,35,35], axes=boxed):
> parche:=plot3d([(b-a)/(a+b),(a*b+1)/(a+b), (1-a*b)/(3*a+3*b)],
a=0.2..2, b=0.2..2, style=WIREFRAME, color =blue, grid=[13,13],
axes=boxed):
>setoptions3d(scaling=constrained): display({hiperb, parche});
```

`Identifique puntos cercanos a la recta` $\lambda+\mu = 0$ `en la superficie, para esto mueva la caja` $[0.2, 2] \times [0.2, 2]$.