Geometría Analítica II

LECTURA 10

Ayudante: Guilmer González　　　　Día 11 de mayo, 2006

El día de hoy veremos:

1. Comentarios sobre la tarea examen.
3. Cómo calcular el plano tangente a una cuádrica (otra forma).

La ecuación general de una cuádrica es de la forma

$$\alpha_{11}x^2 + \alpha_{22}y^2 + \alpha_{33}z^2 + 2\alpha_{12}xy + 2\alpha_{23}yz + 2\alpha_{13}xz + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \gamma = 0$$

en términos matriciales esto lo escribimos como

$$(x, y, z)\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (\beta_1, \beta_2, \beta_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \gamma = 0$$

El lado izquierdo, representa una función cuádrica para (x, y, z). La cual que puede ser escrita de manera compacta como

$$Q(p) = p^t A p + b^t p + \gamma$$

Sabemos que si tiene centro, podemos llevarla a la forma

$$Q(p) = p^t A p + \gamma$$

Por eso, trabajaremos sólo con la parte que se conoce como la forma cuadática.

Fijemos algunas ideas para calcular el plano tangente a una cúadrica. Consideremos un punto p_0 y un vector dirección $\vec{h}$. Sobre p_0 podemos considerar un segmento de recta que parte de p_0, $p_0 + h$, veamos qúe ocurre cuando evaluamos en $Q(p)$.

$$\begin{aligned} Q(p_0 + h) &= (p_0 + h)^t A(p_0 + h) + \gamma \\ &= p_0^t A p_0 + 2p_0^t A h + h^t A h + \gamma \\ &= Q(p_0) + 2p_0^t A h + h^t A h \end{aligned}$$

por una parte, si $p_0 \in \mathcal{S}$, $Q(p_0) = 0$, y si $\|h\|$ es pqueña, tenemos

$$2p_0^t A h = 2p_0^t A(p - p_0) = 0$$

es decir, tenemos la ecuación del plano tangente a $\mathcal{S}$ en p_0

$$p_0^t A p + \gamma = 0$$

Observación: Hemos obtenido un plano tangente localmente a $\mathcal{S}$ en p_0.

En términos del álgebra lineal, se dice que p_0 y h son A-conjugados. Observese que $p_0^t A$ es un vector, un vector normal al plano Π tangente en p_0.

Ejercicios

1. Obtenga el plano tangente a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

2. Observe qué ocurre con el hiperoboloide de una hoja en el punto $(1, 1, 2/3)$. Use `Maple` para observar el plano tangente en p_0 y su intersección con el hiperboloide.