Tarea Examen — Gilberto Gómez Correa

Geometría Analítica I

Ejercicio 4.- Construye la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones.

(a) $xy = 4$

$y = \frac{4}{x}$

Sabemos que

$p(x) = 4$ ∴ no tiene ceros.

$q(x) = x$ ∴ tiene un polo en $x=0$ y una asíntota vertical en la recta $x=0$

Calculando la asíntota horizontal.

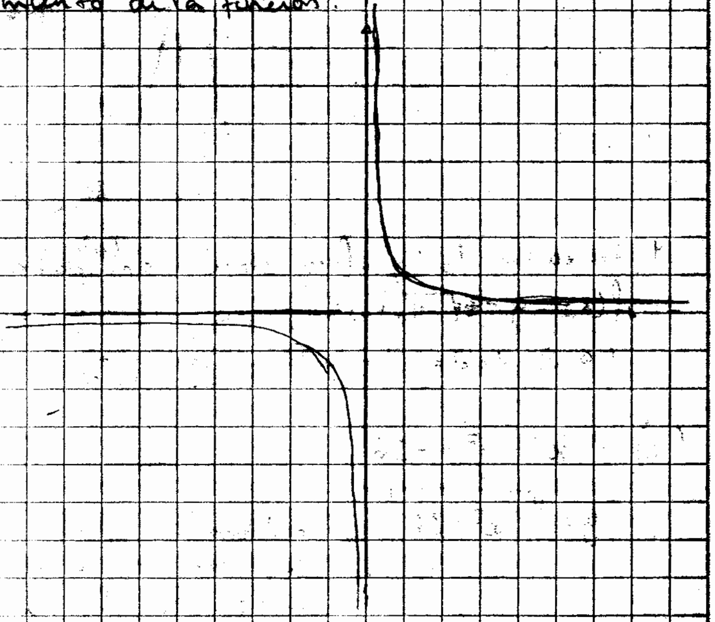
$f(x) = \frac{4}{x}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{4}{x} = \frac{4/x}{x/x} = \frac{0}{1} = 0$ La asíntota horizontal es la recta $y = 0$.

Analizando el comportamiento de la función.

$\lim_{x\to 0^-} \frac{4}{x} = -\infty$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{4}{x} = \infty$



(b) $4x^2 + y^2 = 16$

$y = \sqrt{-4x^2+16}$

Imaginamos que ya conocemos la gráfica sin aplicarle la raíz cuadrada, que sería como sigue

$g(x) = -4x^2 + 16$

$-4x^2 + 16 = 0$

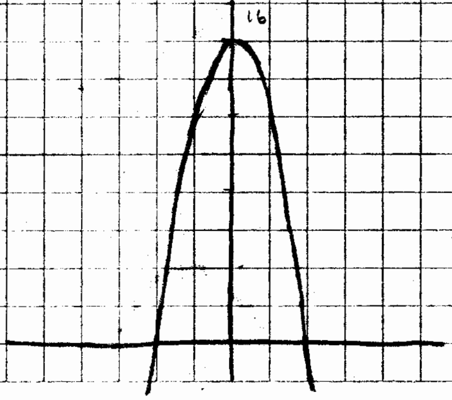
$4x^2 = 16$

$x^2 = 4$

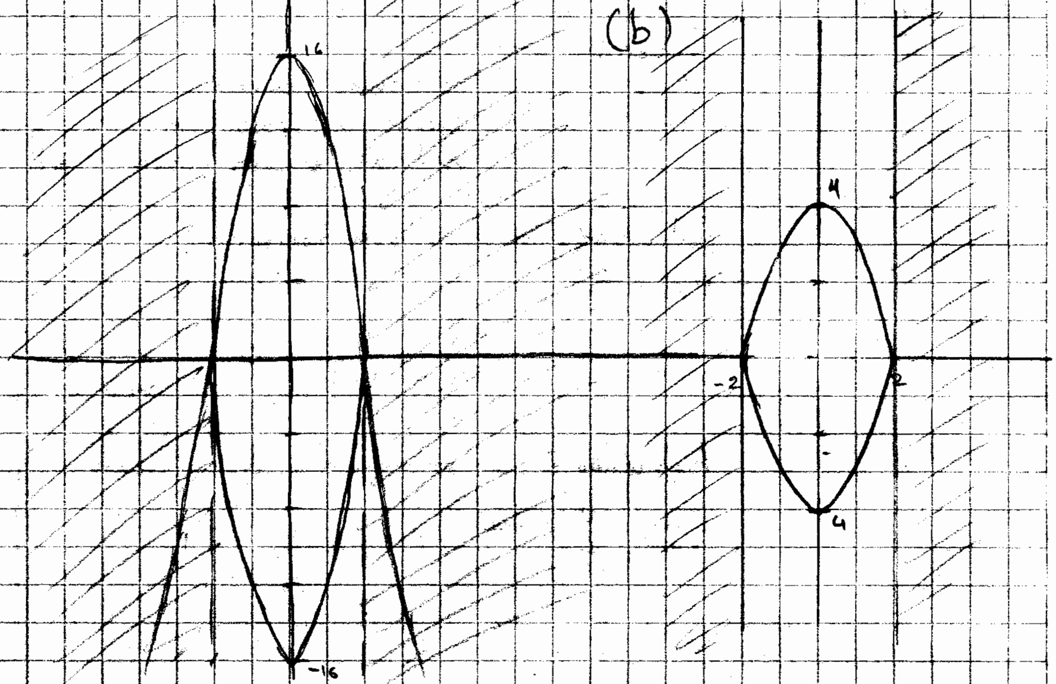
$x = \pm 2$

$\uparrow$

Ceros de la función.



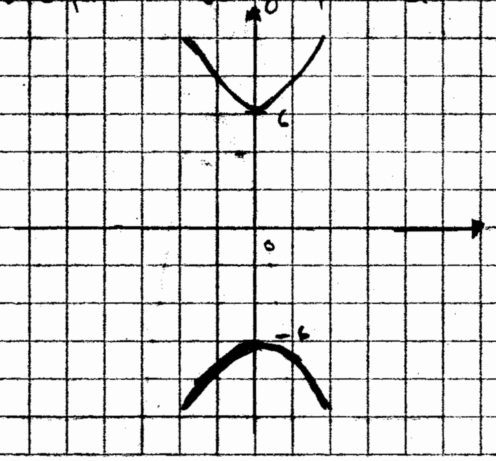
Ahora bien, cancelamos la parte negativa de la gráfica de la función dado que no hay raíces negativas.



y trazamos la gráfica simétrica (a) para obtener las gráficas de la función $f(x) = y = \sqrt{-4x^2+16}$, pero debemos reducir el vértice a las coordenadas (0, 4) dada la raíz y por igual su función simétrica.

(c) $4x^2 - y^2 = -36$

$y = \sqrt{4x^2+36}$, analizando $g(x) = 4x^2 + 36$ tenemos que es una parábola que abre hacia arriba, con vértice en (0,36) y sin ceros. Por ello al aplicarle la raíz sólo podemos recolocar al vértice en (0, 6) y suavizar la curva. Así mismo dibujamos su gráfica simétrica.

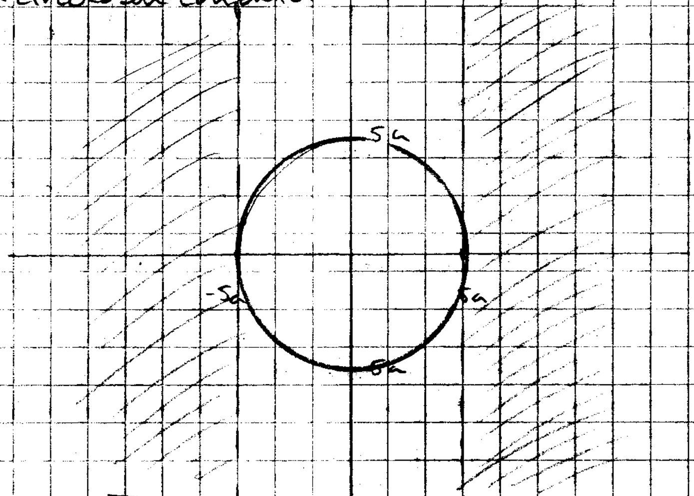


d) $x^2+y^2=25a^2$; $y=\sqrt{-x^2+25a^2}$

Analizando la función como $g(x)=-x^2+25a^2$ observamos que es una parábola que abre hacia abajo, con vértice en $25a^2$ y con ceros en $-x^2+25a^2=0$, $5a$ y en $-5a$

$$x^2=25a^2$$
$$x=\pm 5a$$

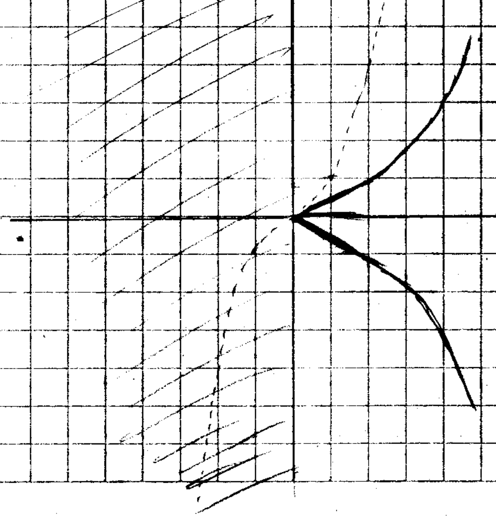
Al aplicarle la raiz a $g(x)$ tenemos que prescindir de los secciones del plano en donde la parábola pasaba debajo de eje x y recolocar el vértice en $5a$, asimismo se debe dibujar la gráfica simétrica por el eje x: obteniendo un circulo en conjunto.



e) $ay^2=x^3$; $y=\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{a}}$

Analizando la función como $g(x)=\sqrt{x^3}$ observamos que sin la raiz la función es la gráfica de x^3, pero que al aplicársela debemos cancelar la sección donde la gráfica pasa al dominio del eje y negativo y suavizar la curva. También se traza la gráfica simétrica.

Pero al dividir entre $\sqrt{a}$ debemos suavizar aún más la gráfica al factor $\frac{1}{\sqrt{a}}$.



f) $xy = c + ax + y$; $xy - y = c + ax$

$$y(x-1) = c + ax$$

$$y = \frac{ax+c}{x-1}$$

Análisis por $f(x) = \frac{p(x)}{g(x)}$

$p(x) = ax + c$, tiene un cero en $x = -\frac{c}{a}$

$ax + c = 0$

$x = -\frac{c}{a}$

$g(x) = x - 1$, tiene un polo en $x = 1$, y una asintota vertical en la recta $x = 1$

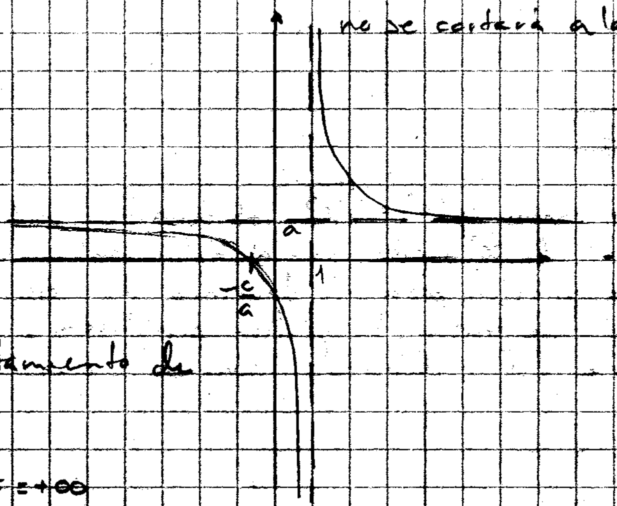
Calculando la asintota horizontal.

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{ax+c}{x-1} = \frac{ax + c/x}{x - 1/x} = \frac{a+0}{1-0} = a$ Tiene una asintota horizontal en $y = a$ con $a \neq 0$

Analizando si la asintota horizontal es cortada en algún punto.

$\frac{ax+c}{x-1} = a$, $ax + c = ax - a$

$c = -a$ ∴ sólo la cortara si $c = -a$, en otro caso no se cortará a la asintota horizontal.



Analizando el comportamiento de la función

$\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{ax+c}{x-1} = \frac{a+c}{0} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{ax+c}{x-1} = \frac{a+c}{0} = -\infty$

j) $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$

Dada la forma $f(x) = \dfrac{P(x)}{q(x)}$ podemos decir lo siguiente.

$P(x) = a^3$, esto es que no tiene ceros
$q(x) = x^2 + a^2$, tampoco tiene polos
$\Big\}$ si $a \neq 0$, pero si $a=0$ la gráfica es la recta $y=0$

l) $y^2 = \dfrac{x^2-4x}{x+1}$, $y = \sqrt{\dfrac{x^2-4x}{x+1}}$

Analizando $g(x) = \dfrac{x^2-4x}{x+1}$ obtenemos lo siguiente:

$g(x) = \dfrac{P(x)}{q(x)} \Rightarrow P(x) = x^2 - 4x$; $x(x-4) \Rightarrow$ tiene ceros en $x=0$ y $x=4$

$q(x) = x+1$; tiene polos en $x=-1$ y $\therefore$ una asintota vertical en la recta $x=-1$

Calculando la asintota horizontal

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-4x}{x+1} = \frac{(x^2-4x)/x^2}{(x+1)/x^2} = \frac{1-0}{0+0} = \nexists \text{ no hay limite.}$$

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x+1 & x^2-4x \\ & x^2+x \\ \hline & -4x \end{array} = \boxed{x} - \frac{4x}{x+1}$$

$\Big\}$ la asintota es oblicua y es $h(x) = y$

Analizando el comportamiento de la función

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2-4x}{x+1} = \frac{1+4}{+0} = \frac{+3}{0} = +\infty$$

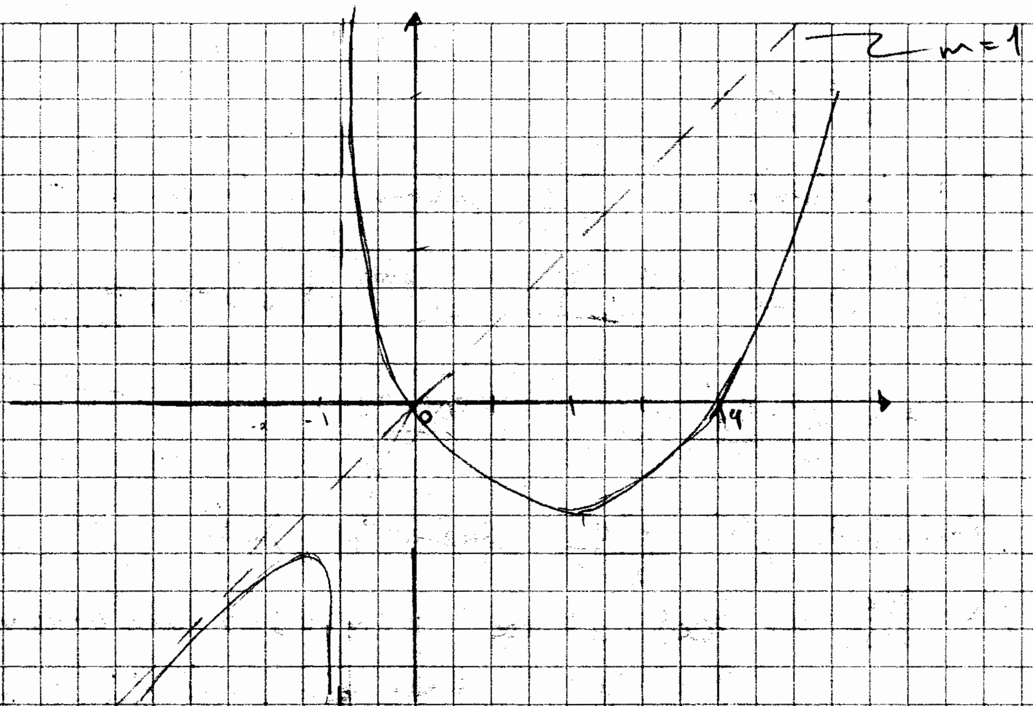
$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2-4x}{x+1} = \frac{1+4}{-0} = \frac{+3}{0} = +\infty$$

Analizando si la asintota oblicua es válida para todos los valores de x

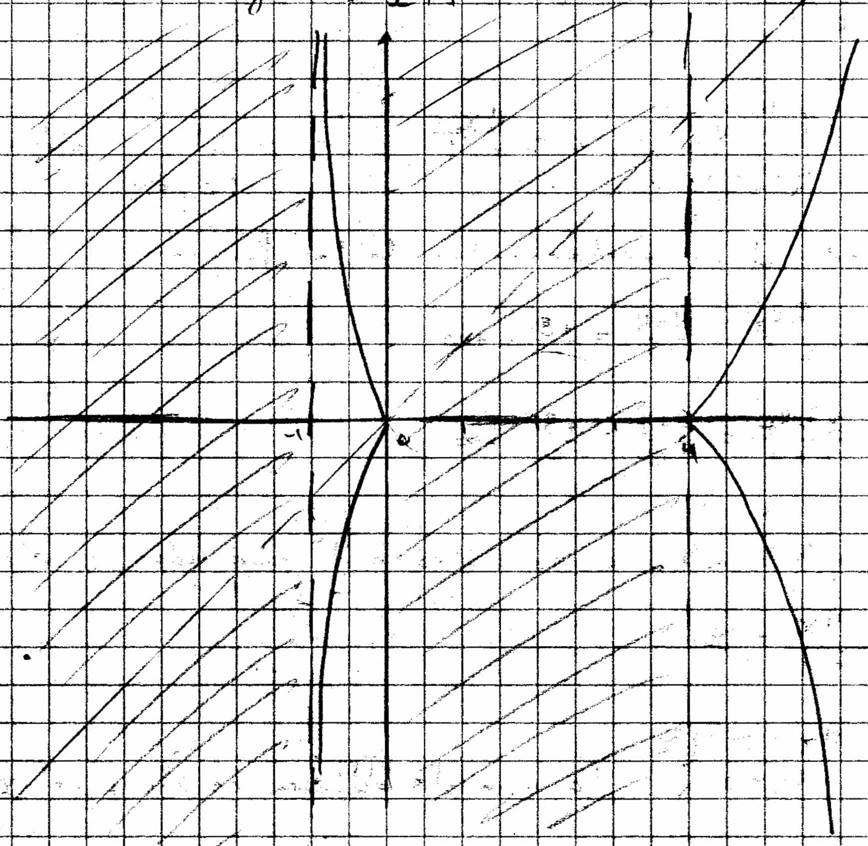
$$\frac{x^2-4x}{x+1} = x$$

$$x^2 - 4x = x^2 + x$$
$$-4x = x$$

la asintota oblicua no vale para $x=0$



Sin embargo, al aplicar la raiz cuadrada, cancelaremos las partes negativas en y de la función y graficaremos su simétrica al eje x quedando la gráfica de $y = \pm\sqrt{\frac{x^2-4x}{x+1}}$



Ejercicio

2) Construye en un diagrama las gráficas de las siguientes ecuaciones, y nota la diferencia en las gráficas dadas por las diferencias en el signo de las ecuaciones

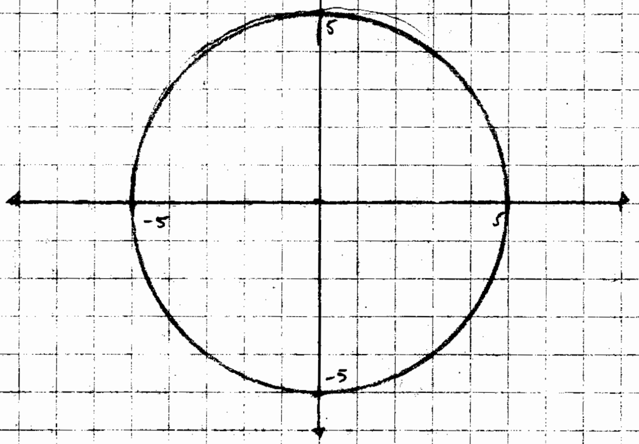
$$x^2+y^2=25$$
$$x^2-y^2=25$$
$$-x^2+y^2=25$$

Primero construiré cada gráfica por separado.

a) Para $x^2+y^2=25$

Se nota que la ecuación tiene la forma de la ecuación de la circunferencia con centro (h, k) en el origen.

$$x^2+y^2=r^2$$
$$x^2+y^2=25$$ y el radio es igual a 5.



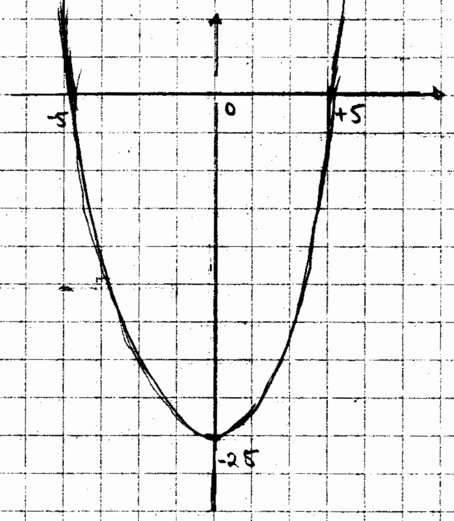
b) Para $x^2-y^2=25$

$y=\sqrt{x^2-25}$ => Analizando la función sin la raíz obtenemos.

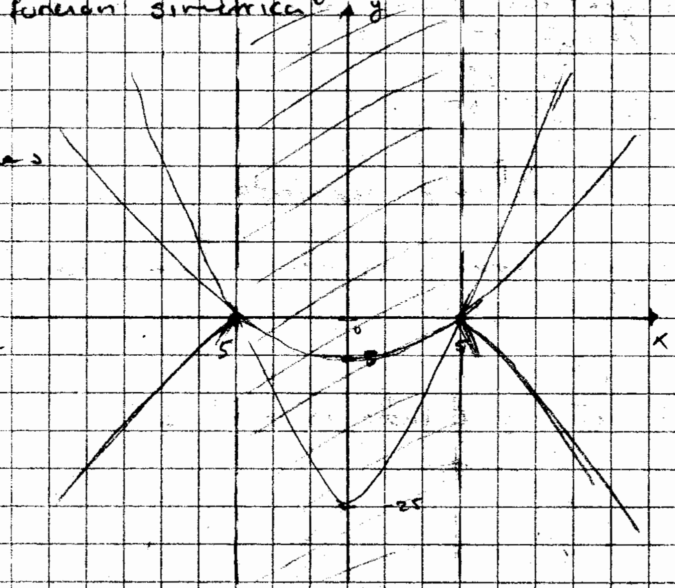
Una parábola con ceros en

$x^2-25=0$
$x^2=25$
$x=\pm5$

y el vértice en (0, -25)



Ahora desecharemos la sección de la gráfica que pasa por debajo del eje x y dibujaremos la función simétrica



Así obtenemos las gráficas para $y=\pm\sqrt{x^2-25}$ y las curvas deben suavizarse

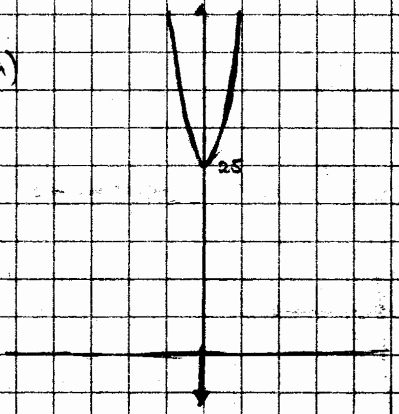
c) Para $-x^2+y^2=25$

Tenemos $y=\sqrt{x^2+25}$; Analizando sin tomar en cuenta la raiz, obtenemos una parábola con ceros en: $x^2+25=0$, en realidad sin ceros, sería

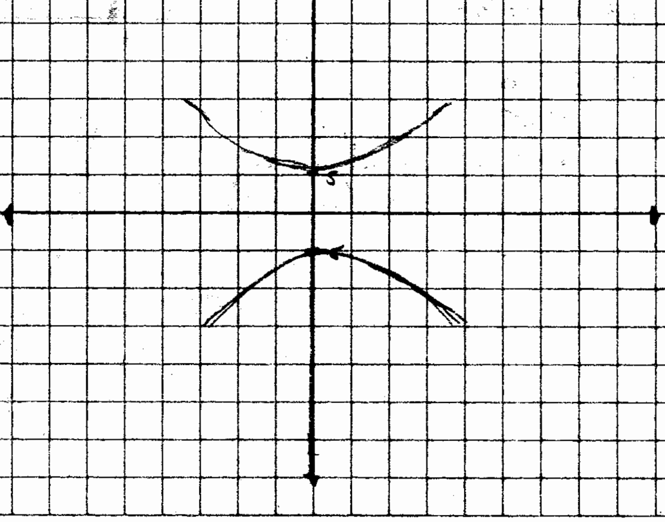
$x^2=-25$

una parábola estándar con vértice en $(0,25)$, (a). Para graficar $y=\sqrt{x^2+25}$ reducimos las coordenadas del vértice a $(0,5)$ por la raiz, y trazaremos la función simétrica con respecto al eje x; no habrá regiones prohibidas dado que no hay valores negativos dentro de la raiz. Las curvas de las parábolas también se suavizarán (b)

(a)



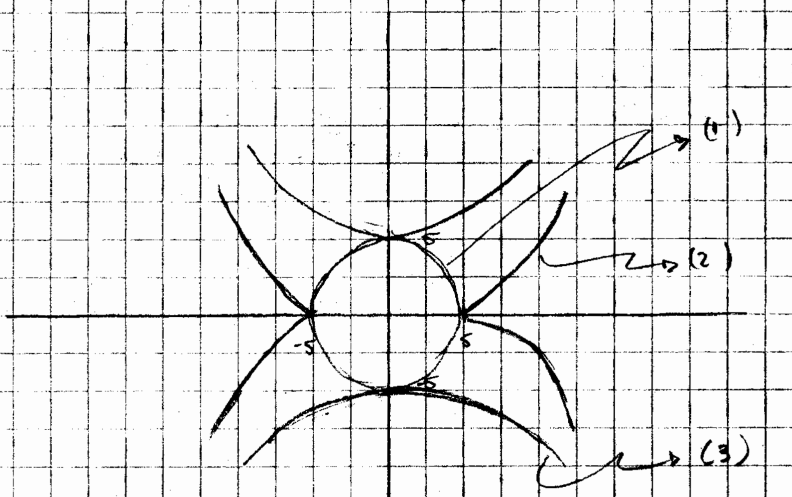
(b)



Como conclusión podemos decir que cuando la función está en forma implícita y es de la forma $\pm x^2 \pm y^2 = a$; → es un círculo si $x^2 + y^2 = a$ (1)

→ son los brazos de dos parábolas sin su parte central porque son valores prohibidos si $x^2 - y^2 = a$ (2)

→ son dos parábolas opuestas  sin regiones prohibidas si $-x^2 + y^2 = a$ (3)

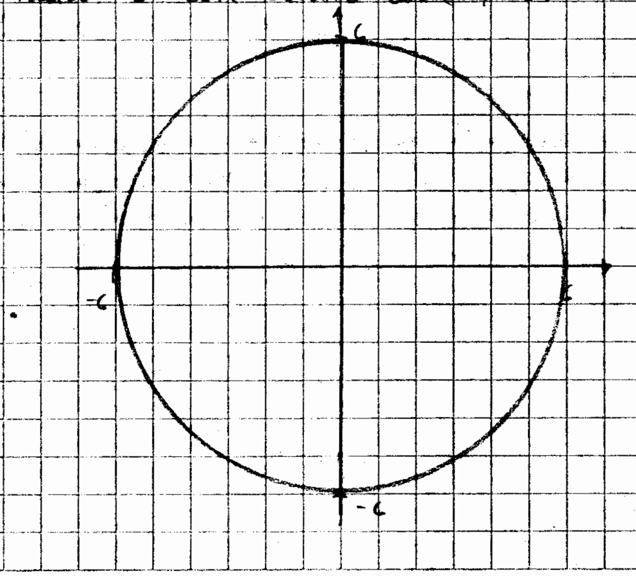


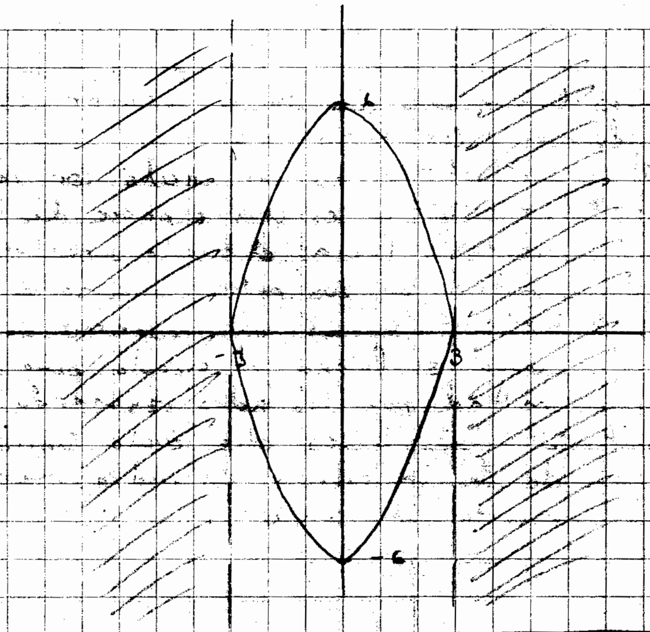
Ejercicio

3) Construya en un diagrama las gráficas de las siguientes ecuaciones y nota las diferencias en las gráficas dadas las diferencias en los valores de los coeficientes numéricos en

$$x^2 + y^2 = 36$$
$$x^2 + 4y^2 = 36$$
$$4x^2 + y^2 = 36$$
$$x^2 + 4y^2 = 25$$

(a) Para $x^2 + y^2 = 36$; podemos observar que tiene la forma implícita un círculo de radio = 6 con centro en (0,0).



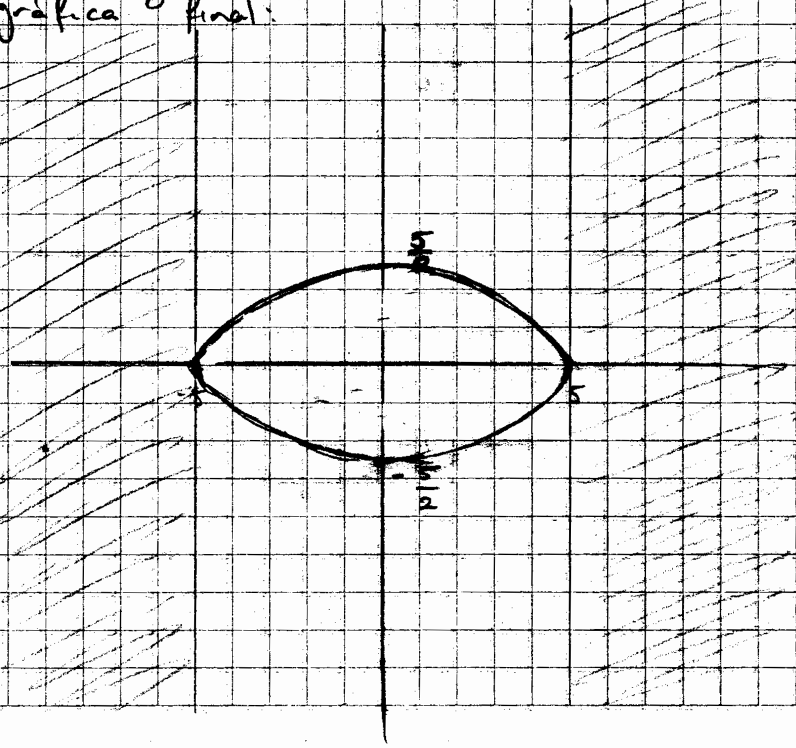


d) Para $x^2+4y^2=25$ tenemos que $y=\sqrt{\frac{-x^2+25}{4}}$ = $y=\frac{\sqrt{-x^2+25}}{2}$

Analizando paralelamente la función, para $g(x)=\sqrt{-x^2+25}$ observamos que sin la raíz, se comporta como una parábola que abre hacia abajo con vértice en $(0,25)$ y con ceros en $-x^2+25=0$, ceros en 5 y -5.

$$25=x^2$$
$$\pm5=x$$

Ahora bien, aplicando la raíz tenemos que cancelar la parte del plano donde la parábola corta al eje X y pasa hacia abajo. También reduciremos el vértice a $(0,5)$ dada la raíz. Posteriormente se traza la gráfica simétrica. Sin embargo, aún los vértices deberán reducirse a $\frac{1}{2}$ para obtener la gráfica final:



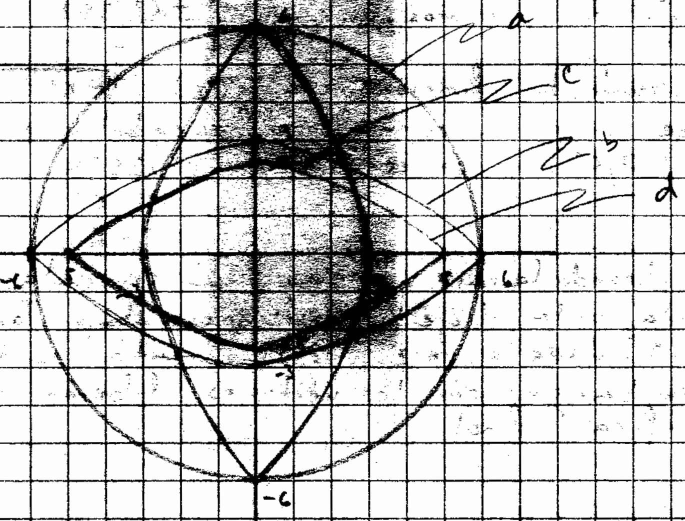
Como conclusión podemos decir que cuando la función está de forma implicita y es de la forma $ax^2 + by^2 = c$

a) → $x^2+y^2=c$ es un circulo con radio $\sqrt{c}$

b) → $x^2+4y^2=c$ es una especie de óvalo horizontal, como si fuera el circulo superior achatado a la mitad en sus polos superior e inferior.

c) → $4x^2+y^2=c$ es una especie de ovalo vertical como si fuera el circulo pero achatado a la mitad por los lados izquierdo y derecho

d) → $x^2+4y^2=d$ es otro óvalo horizontal pero derivado de un circulo de radio menor. y que quedaría inscrito en a y b.



Como conclusión podemos decir que cuando la función está de forma implicita y es de la forma $ax^2 + by^2 = c$

a) → $x^2+y^2=c$ es un circulo con radio $\sqrt{c}$

b) → $x^2+4y^2=c$ es una especie de óvalo horizontal, como si fuera el circulo superior achatado a la mitad en sus polos superior e inferior.

c) → $4x^2+y^2=c$ es una especie de ovalo vertical como si fuera el circulo pero achatado a la mitad por los lados izquierdo y derecho

d) → $x^2+4y^2=d$ es otro óvalo horizontal pero derivado de un circulo de radio menor. y que quedaría inscrito en a y b.