Geometría Analítica I

EXAMEN 2

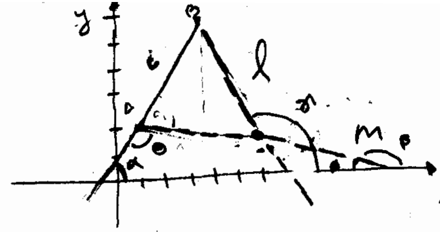
Profesor: Pablo Barrera Día 25 de agosto, 2005

NOMBRE: Gilberto Gómez Correa

Resuelva adecuadamente los siguientes problemas:

1. Muestre que las diagonales del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos $A(0,3)$, $B(3,5)$, $C(5,2)$ y $D(2,0)$ son iguales. Muestre que este cuadriátero es rectángulo.
2. Encuentre el punto $P(x,y)$ que se encuentra a igual distancia de los puntos $A(-2,-4)$, $B(6,-4)$ y $C(-1,3)$.
3. Encuentre el tercer vértice del triángulo equilátero, donde los otros dos son $A(1,2)$ y $B(4,6)$.
4. Encuentre el área del polígono, cuyos vértices son: $P_1(2,4)$, $P_2(5,1)$, $P_3(4,-3)$, $P_4(1,-5)$, $P_5(-2,-3)$ y $P_6(-2,4)$.
5. Describa una demostración del Teorema de Pitágoras.

3) $A(1,2)$
$B(4,6)$



$$m_{AB} = \frac{6-2}{4-1} = \frac{4}{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{4}{3}$$

$$\alpha = \operatorname{ArcTan} \frac{4}{3}$$

$$\alpha = 25.3212^\circ$$

Sabemos que $\theta = 120^\circ$ porque la linea m está a 60° de la linea c.

Entonces $\phi = -(120 + 25.3212) + 180$

$$\phi = -34.6787^\circ$$

$\beta = 180 - \phi$, por $\measuredangle$'s suplementarios

$$\beta = 145.3212$$

$$\tan \beta = -0.69188$$

$\gamma = \beta - 60^\circ$ Porque son 60° los que hace la

$\gamma = 85.3212^\circ$ linea l sobre la linea m.

$$\tan \gamma = 12.2185$$

Teniendo las pendientes de las rectas l y m, calculemos sus ecuaciones de recta (ya que pasan por B y A respectivamente) y la solución del sistema es el punto dónde se ubica el tercer vértice

El 3^{er} vértice está en $C(-1.5, 5.6)$,

bueno, uno de ellos, porque hay 2.

Ec_m con $\tan\beta$

$$y - 2 = \tan\beta(x-1)$$

$$x - \tan\beta(y-2) = 1$$

Ec_l con $\tan\gamma$

$$y - 6 = \tan\gamma(x-4)$$

$$x - \tan\gamma(y-6) = 4$$

$$x = 4 + \tan\gamma(y-6)$$

$$4 + \tan\gamma(y-6) - \tan\beta(y-2) = 1$$

$$4 + 12.21y - 73.26 + 0.692y - 1.384 = 1$$

$$12.902y = 71.644$$

$$y = 5.55$$

$$x - \tan\gamma(5.55-6) = 4$$

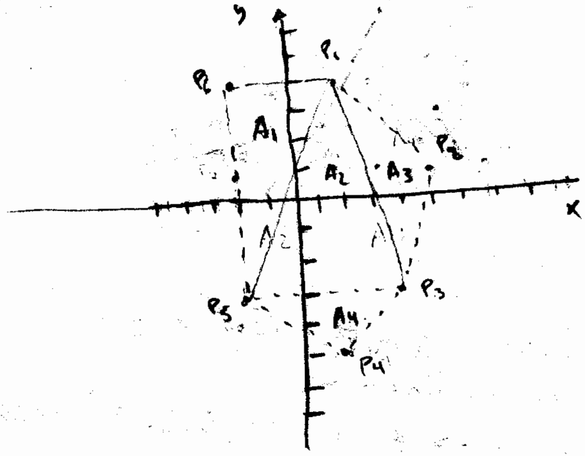
$$x - \tan\gamma(-0.45) = 4$$

$$x + 5.4945 = 4$$

$$x = 4 - 5.4945$$

$$x = -1.4945$$

4) $P_1\ (2,4)$
$P_2\ (5,1)$
$P_3\ (4,-3)$
$P_4\ (1,-5)$
$P_5\ (-2,-3)$
$P_6\ (-2,4)$



$$A_1 = \frac{1}{2}\left(x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2) \right)$$ donde $P_1(x_1,y_1)$ $P_6(x_2,y_2)$ $P_5(x_3,y_3)$

$$= \frac{1}{2}\left(2(4+3) + (-2)(-3-4) + (-2)(4+3) \right)$$

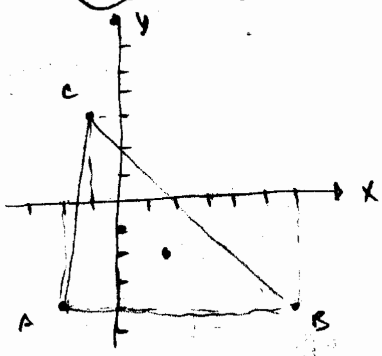
$$= \frac{1}{2}(14+14+(-14))$$

$$= \frac{1}{2}(14) = 7$$

$A_2 =$

2. A(-2,-4)
B(6,-4)
C(-1,3)

El punto buscado es el circuncentro (punto en el que se cruzan las mediatrices) y las mediatrices son rectas perpendiculares a los lados. Entonces:



$$m\,AC = \frac{-4-3}{-2+1} = \frac{-7}{-1} = 7 \qquad M_{xAC} = \frac{-2+(-1)}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$m \perp AC = m_1 m_2 = -1 \qquad M_{yAC} = \frac{-4+3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$m_2 = -\frac{1}{7}$$

$$y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{7}\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

$$7y + \frac{7}{2} = -x - \frac{3}{2}$$

$$x + 7y = -\frac{7}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

$m\,AB = 0$ por lo tanto la ecuación de la recta $\perp$ a AD es $x = 2$

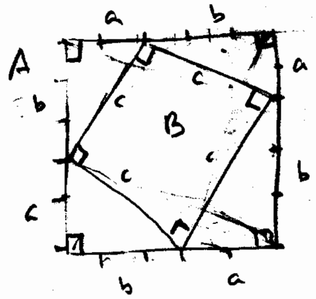
y $M_{xAB} = \frac{6-2}{2} = 2$

$M_{yAD} = \frac{-4-4}{2} = \frac{-8}{2} = -4$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{x = 2} \\ \boxed{x + 7y = -5} \end{array}\right\} \text{obtenemos que } \begin{array}{l} 2 + 7y = -5 \\ 7y = -7 \\ y = -1 \end{array}$$

El punto buscado es $P(2,-1)$

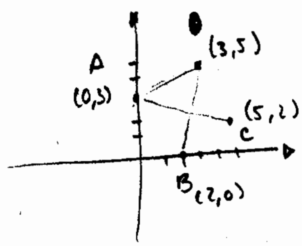
5. Si tenemos el siguiente cuadrado B inscrito en el cuadrado A.



El área del cuadrado interno es

$$c^2 = (a+b)^2 - 4\frac{ab}{2}$$
$$c^2 = a^2 + \cancel{2ab} + b^2 - \cancel{2ab}$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$

1.



Las diagonales son las rectas AC y BC

$dAC = \sqrt{(5-0)^2 + (2-3)^2}$

$d = \sqrt{25+1}$

$d = \sqrt{26}$

$dBD = \sqrt{(3-2)^2 + (5-0)^2}$

$d = \sqrt{26}$

Las medidas de las diagonales son iguales $AC = BC$

$\sqrt{26} = \sqrt{26}$

$dAD = \sqrt{(3-0)^2 + (5-3)^2}$

$= \sqrt{9+4}$

$= \sqrt{13}$

$dDC = \sqrt{(5-3)^2 + (2-5)^2}$

$= \sqrt{4+9}$

$= \sqrt{13}$

$dAB = \sqrt{(2-0)^2 + (0-3)^2}$

$= \sqrt{4+9}$

$= \sqrt{13}$

Dado que $AD = DC = AB$ porque sus diagonales son iguales puede concluirse que el cuadrilátero ABCD es un cuadrado.