Geometría Analítica I

EXAMEN 2

Profesor: Pablo Barrera — Día 25 de agosto, 2005

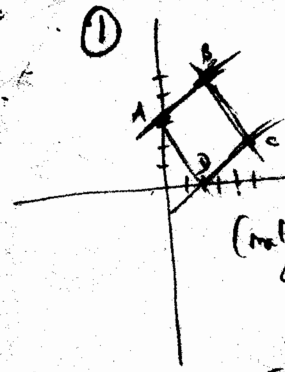
NOMBRE: Franz Michel Martínez Ríos

Resuelva adecuadamente los siguientes problemas:

1. Muestre que las diagonales del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos $A(0,3)$, $B(3,5)$, $C(5,2)$ y $D(2,0)$ son iguales. Muestre que este cuadriátero es rectángulo.
2. Encuentre el punto $P(x,y)$ que se encuentra a igual distancia de los puntos $A(-2,-4)$, $B(6,-4)$ y $C(-1,3)$.
3. Encuentre el tercer vértice del triángulo equilátero, donde los otros dos son $A(1,2)$ y $B(4,6)$.
4. Encuentre el área del polígono, cuyos vértices son: $P_1(2,4)$, $P_2(5,1)$, $P_3(4,-3)$, $P_4(1,-5)$, $P_5(-2,-3)$ y $P_6(-2,4)$.
5. Describa una demostración del Teorema de Pitágoras.

Nota: Argumente adecuadamente su respuesta; no serán tomadas en cuenta observaciones o señalamientos que realicen, sin su debida justificación.

①



(mal dibujado obvio)

→ Las diagonales están definidas por los segmentos AC y BD

Así:

$d(AC) = \sqrt{(5-0)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

$d(BD) = \sqrt{(2-3)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$ ∴ los segmentos, las líneas AC y BD son iguales, y así, los diametros son iguales

Se puede demostrar con suficiencia que la figura es un rectangulo si uno de sus angulos es de 90° y que dos de los lados sean diferentes.

Para que uno de sus angulos sea de 90°, las pendientes de dos rectas deben ser perpendiculares, así: dos pendientes son perpendiculares si: $m_1 m_2 = -1$

$m_{AD} = \dfrac{3-0}{0-2} = \dfrac{-3}{2}$ $\quad m_{CD} = \dfrac{2-0}{5-2} = \dfrac{2}{3}$ y dado que $\Rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = -1$ ✓

Ahora, para los lados:

$d(A,D) = \sqrt{(3-0)^2+(0-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

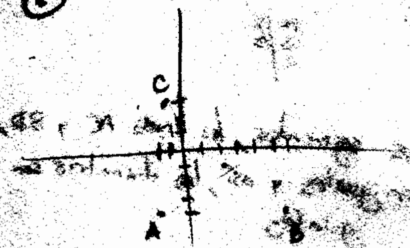
$d(C,D) = \sqrt{(5-2)^2+(2-0)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$d(B,C) = \sqrt{(3-5)^2+(5-2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$d(A,B) = \sqrt{(0-3)^2+(3-5)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

y dado que los lados son iguales, y hay un angulo de 90° el cuadrilatero es un cuadrado, y es rectangulo donde $d(A,D) = d(C,D) = d(B,C) = d(A,B)$

(2)



Hallar el punto P a igual distancia de A, B y C

$d^2(P,A) = d^2(P,B) = d^2(P,C)$

$d^2(P,A) = (x_p+2)^2 + (y_p+4)^2$

$d^2(P,B) = (x_p-6)^2 + (y_p+4)^2$

$d^2(P,C) = (x_p+1)^2 + (y_p-3)^2$

$(x_p+2)^2 + (y_p+4)^2 = (x_p-6)^2 + (y_p+4)^2$

$\cancel{x_p^2} + 4x_p + 4 + \cancel{y_p^2} + \cancel{8y_p} + \cancel{16} = \cancel{x_p^2} - 12x_p + 36 + \cancel{y_p^2} + \cancel{8y_p} + \cancel{16}$

$16x_p = 32$

$x_p = 2$

ahora es $d^2(P,B) = d^2(P,C)$

$(2-6)^2 + (y_p+4)^2 = (2+1)^2 + (y_p-3)^2$

$16 + \cancel{y_p^2} + 8y_p + 16 = 9 + \cancel{y_p^2} - 6y_p + 9$

$8y_p + 32 = -6y_p + 18$

$14y_p = 18 - 32 = -14$

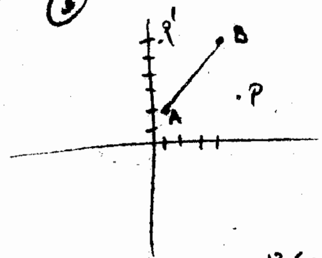
$y_p = -1$

el punto es

$P = (2, -1)$

(1)

3



Para hallar el otro vértice

$$d^2(B,P) = (x_P - x_B)^2 + (y_P + y_B)^2$$

$$d^2(A,P) = (x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2$$

$$d^2(A,P) = d^2(A,B) = d^2(B,P)$$

$$d^2(A,B) = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25.$$

$$\begin{array}{r|l} 125 & 5 \\ 185 & 5 \\ 37 & 37 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 100 & 5 \\ 20 & 5 \\ 4 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 41 \\ \times 41 \\ \hline 41 \\ 164 \\ \hline 1681 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 36 \\ \times 21 \\ \hline 36 \\ 72 \\ \hline 756 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1681 \\ -756 \\ \hline 925 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 164 \\ \times \\ \hline 200 \end{array}$$

Con $x_B = 4$ y $y_B = 6$

$$(x_P - 4)^2 + (y_P - 6)^2 = 25$$

Con $x_A = 1$ y $y_A = 2$

$$(x_P - 1)^2 + (y_P - 2)^2 = 25$$

$$(x_P - 4)^2 + (y_P - 6)^2 = (x_P - 1)^2 + (y_P - 2)^2$$

$$\cancel{x_P^2} - 8x_P + 16 + \cancel{y_P^2} - 12y_P + 36 = \cancel{x_P^2} - 2x_P + 1 + \cancel{y_P^2} - 4y_P + 4$$

$$-8x_P - 12y_P + 52 = -2x_P - 4y_P + 5$$

$$-6x_P - 8y_P + 47 = 0$$

$$x_P + \frac{8}{6}y_P - \frac{47}{6} = 0$$

$$x_P = \frac{47}{6} - \frac{4}{3}y_P$$

Así

$$(x_P - 1)^2 + (y_P - 2)^2 = 25$$

$$\left(\frac{47}{6} - \frac{4}{3}y_P - 1\right)^2 + (y_P - 2)^2 = 25$$

$$\left(\frac{41}{6} - \frac{4}{3}y_P\right)^2 + (y_P - 2)^2 = 25$$

$$\left(\frac{41}{6}\right)^2 - 2\left(\frac{41}{6}\right)\left(\frac{4}{3}\right)y_P + \frac{16}{9}y_P^2 + y_P^2 - 4y_P + 4 = 25$$

$$\frac{25}{9}y_P^2 - \left[4 + 2\left(\frac{41}{6}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\right]y_P + \left[-21 + \left(\frac{41}{6}\right)^2\right] = 0$$

$$\frac{25}{9}y_P^2 - \left[4 + \left(\frac{41}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\right]y_P + \left[\frac{41^2}{36} - \frac{(36 \cdot 21)}{36}\right] = 0$$

$$\frac{25}{9}y_P^2 - \left[\frac{36}{9} + \frac{164}{9}\right]y_P + \left(\frac{925}{36}\right) = 0$$

$$25y_P^2 - 200y_P + \frac{925}{4} = 0$$

$$100y_P^2 - 800y_P + 925 = 0$$

$$y_P^2 - 8y_P + \frac{925}{100} = 0$$

$$y_P^2 - 8y_P + \frac{27}{4} = 0$$

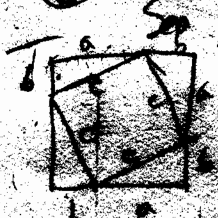
$$y_P = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 37}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{27}}{2} = 4 \pm \frac{1}{2}\sqrt{27}$$

hay dos puntos por que existen P y P' que satisface que sea un triangulo equilatero.

Así

$$x_P = \frac{47}{6} - \frac{4}{3}\left(4 \pm \frac{1}{2}\sqrt{27}\right) = \frac{47}{6} - \frac{16}{3} \mp \frac{2}{3}\sqrt{27}$$

(5) Sea  el triangulo dibujamos



El cuadrado mayor es de área $(a+b)^2$
El cuadrado interior es de área c^2
Cada triangulo rectangulo es de área $\frac{1}{2}ab$

Así:

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\left(\frac{1}{2}ab\right)$$

pues el área del cuadrado grande es igual a la del cuadrado pequeño y los cuatro triangulos

$$a^2 + \cancel{2ab} + b^2 = c^2 + \cancel{2ab}$$

$$\therefore \underline{a^2 + b^2 = c^2}$$

Interpolación Baricéntrica