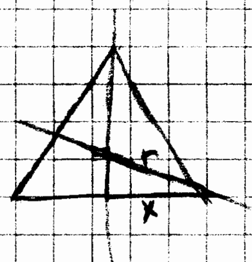
Geometria Analitica.

Martinez Rios Franz Michel

(1)

El área del circulo se sabe que se calcula con $A = \pi r^2$

Para el caso del triangulo equilatero inscrito,



Dado que los angulos internos del triangulo suman 180° cada angulo es de 60° y como el radio lo parte a la mitad, este forma un triangulo rectangulo como se ve en la figura

Así, $\frac{x}{r} = \cos 30°$ y la base del triangulo es $2x$

Siendo $2r\cos 30° = 1.732r$ ó $x = \frac{\sqrt{3}}{2}r$

Utilizando el teorema de Herón, calculamos el área en función de los lados

$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ pero $a=b=c$ $A = \sqrt{s(s-a)^3}$

y $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

$$A = \sqrt{\frac{3}{2}a\left(\frac{3}{2}a-a\right)^3} = \sqrt{\frac{3}{2}a\left(\frac{1}{2}a\right)^3} = \sqrt{\frac{3}{2}a\left(\frac{1}{8}a^3\right)}$$

$s = \frac{3}{2}a$

$$A = \sqrt{\frac{3}{16}a^4} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Sustituyendo $\frac{1}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2}r$

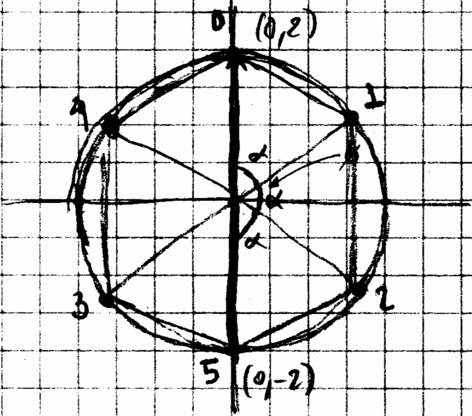
$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}r\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{3}{\cancel{4}}r^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$$

Así el área sombreada que es la diferencia del área del circulo con la del triangulo

$$A_s = \pi r^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2 \qquad \boxed{A_s = \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)r^2}$$

(2)

Observando el dibujo en un plano cartesiano:



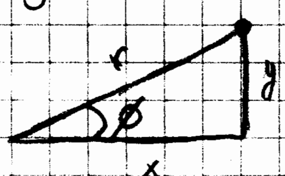
Formamos el hexagono con 6 triangulos

Para que el hexagono sea regular α tiene que ser igual en cada uno de los angulos señalados, de lo contrario el hexagono tendria lados de diferente tamaño.

$\therefore \quad 3\alpha = 180 \qquad \alpha = 60$

y dado que $\phi + \alpha = 90 \qquad \phi = 90 - 60 \qquad \phi = 30$

y se forma un triangulo rectangulo y el punto estara dado por relaciones trigonometricas:



$x = r \cos\phi$ $\qquad$ dado que $\phi = 30$

$y = r \operatorname{Sen}\phi$ $\qquad \cos\phi = \sqrt{3}/2 \quad$ y $\operatorname{Sen}\phi = 0.5$

$\therefore$ el punto $1(x,y)$ es $\left(2(\sqrt{3}/2),\ 2(0.5)\right) \rightarrow (\sqrt{3}, 1)$

Observando y siguiendo el mismo razonamiento, solo hay que 'trasladar' las coordenadas, me refiero a que daran los mismos valores numericos, pero con diferentes signos dependiendo del cuadrante en el que se hallen los puntos.

Asi, los puntos que corresponden a los vertices de un hexagono regular inscrito en un circulo, con centro en el plano cartesiano y radio de 2 unidades son:

$(0,2) \quad (+\sqrt{3},1) \quad (-\sqrt{3},1) \quad (0,-2) \quad (+\sqrt{3},-1) \quad (-\sqrt{3},-1)$

③

Observando el triángulo por "rectas" el cateto opuesto con 'ecuación de la recta' $x=0$ para toda y, tendrá a todos los puntos de $y \in [0,3]$ a una distancia de 1 si $x=-1$. Lo mismo con el cateto adyacente, su 'ecuación de recta' es $y=0$ para toda x, para el triángulo en específico, para los puntos $x \in [0,4]$, estos se hallarán a una distancia de 1 si: $y=-1$

Para la hipotenusa la ec. de la recta es $y = mx + b$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-0}{0-4} = -\frac{3}{4} \quad y \quad b = 3 \quad \therefore \quad y = -\frac{3}{4}x + 3$$

Dado que la ec. para calcular la distancia entre una recta y otra paralela a ella es

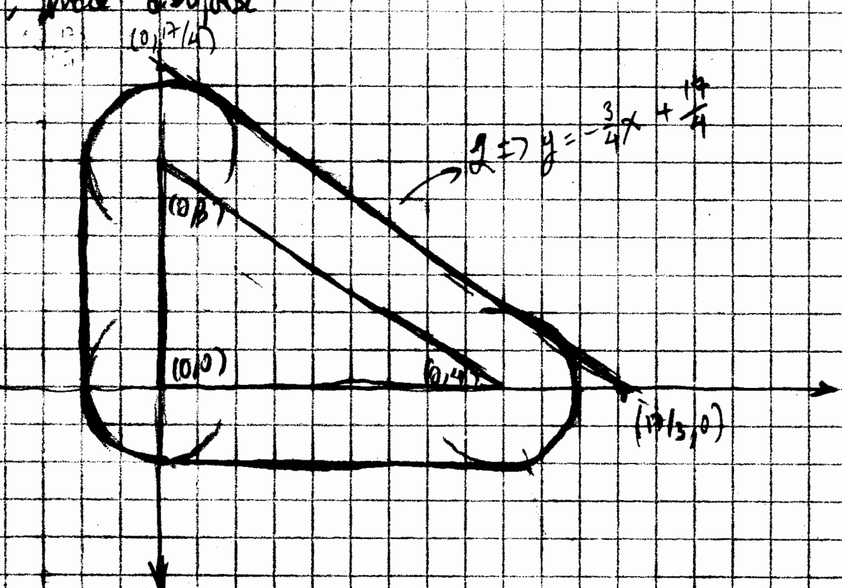
$$d = \frac{b_2 - b_1}{\sqrt{1+m^2}} \quad y \text{ como } d=1 \quad b_1 = 3 \quad y \quad m = -\frac{3}{4}$$

$$1 = \frac{b_2 - 3}{\sqrt{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{b_2 - 3}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{b_2 - 3}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{b_2 - 3}{\left(\frac{5}{4}\right)} \qquad b_2 = \frac{5}{4} + 3 \qquad b_2 = \frac{17}{4}$$

y la recta es $y = -\frac{3}{4}x + \frac{17}{4}$

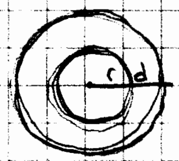
En los vértices se puede calcular la distancia al rededor del punto como si este fuera el centro de un círculo de radio 1 $\therefore x^2 + y^2 = 1$.

Así, puede dibujarse



Así todos los puntos marcados son aquellos a una distancia 1 del triángulo

(4) Todos los puntos a una distancia d del circulo forman otro circulo que contiene al original:



En el problema el circulo tiene una ecuacion

$$x^2+(y-4)^2 = 4 = (2)^2$$

Sea d entonces la distancia de todos los puntos que estan separados del circulo esa distancia, se forma una familia de circulos tal que:

$$x^2+(y-4)^2 = (2+d)^2$$

La linea recta esta sobre el eje x (pues no se ve otra) por lo que para toda x, $y=0$ y los puntos (x_p, y_p) se encontraran separados la distancia d de la linea recta, formando una familia de rectas con ecuacion $y=d$

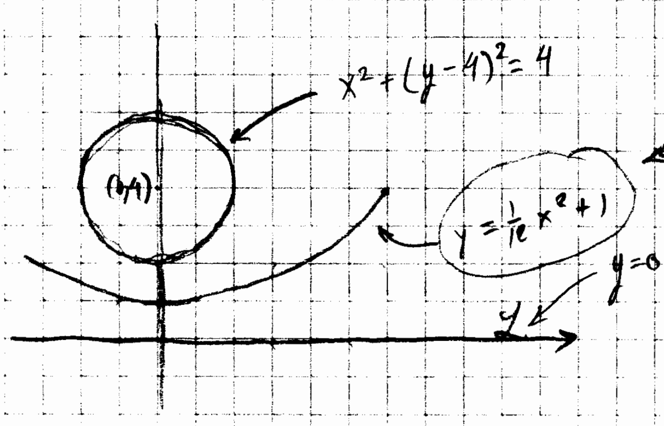
Dado que se piden los puntos cuya distancia sea igual hacia el ~~pun~~ circulo y hacia la recta entonces, necesariamente d es igual en ambos razonamientos así:

$$x^2+(y-4)^2 = (2+d)^2 = (2+y)^2$$

$$x^2+\cancel{y^2}-8y+16 = \cancel{y^2}+4y+4$$

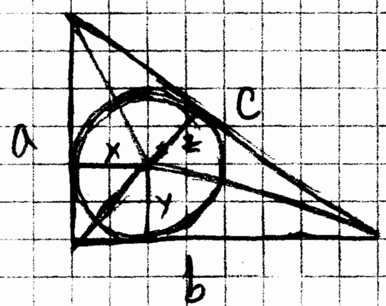
$$x^2-12y+12=0$$

y se obtiene la ec. de una parabola $\boxed{y=\frac{1}{12}x^2+1}$ la cual describe el conjunto de puntos equidistantes a la recta y al circulo



(5) Hay dos maneras de obtener el area de un triangulo que son utiles para nuestro fin.

La primera, por el método clásico : $A_t = \frac{ab}{2} = \frac{(3)(4)}{2} = \frac{12}{2} = 6$



Y la segunda es a partir de dividir el triangulo en figuras mas pequeñas, sacar el area de estas y sumarlas

Convenientemente trazamos las bisectrices ya que la interseccion de estas es en el centro del circulo, lo hemos hecho a sabiendas que para dibujar un circulo inscrito en un triangulo hay que hacer eso

Finalmente, las alturas de cada uno de los triangulos creados sera el radio del circulo, esto debido a que la interseccion de cada bisectriz generó un vertice cuya linea dirigida a uno de los lados lo corta perpendicularmente, cumpliendo asi la definicion de altura y empalmandose con el radio, pues la perpendicular de cualquier linea tangente a un circulo dirigida a su centro forma su diametro (o mejor dicho, la cuerda de mayor longitud dentro del circulo).

Asi $A_t = \frac{1}{2}xa + \frac{1}{2}yb + \frac{1}{2}zc$ dado que $x = y = z = r$

$A_t = \frac{1}{2}(a+b+c)r$

Sustituyendo y sabiendo ya el valor de $A_t = 6$

$\frac{1}{2}(3+4+5)r = 6 \rightarrow \frac{1}{2}(12)r = 6 \rightarrow 12r = 12$; $\boxed{r = 1}$