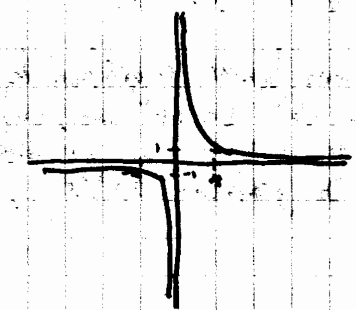
Geometría Analítica I

Franz Mrzhel Martínez Ríos.

Ejercicio 1.

(a). $xy = 4$

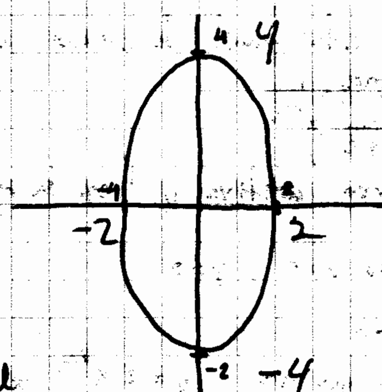
Haciendo $f(x) = y = \frac{4}{x}$ claramente podemos ver que la tendencia de y es hacerse pequeña cuando x es muy grande. Análogamente cuando x es muy pequeña y es muy grande.
Note que dependiendo el signo de x, la dirección de la curva. También que en $x=4$ $y=1$.



(b) $4x^2 + y^2 = 16$

Puntos fáciles de reconocer son:
$x=0 \implies y = \pm 4$
$y=0 \implies x = \pm 2$

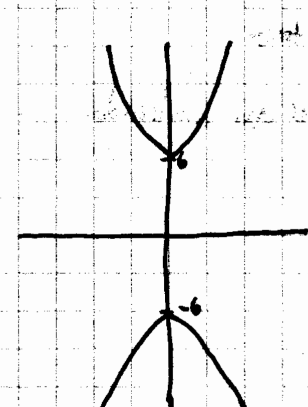
Note que si $|y| \geq 4$, para que la igualdad se cumpla $x=0$ a fuerza.
Lo mismo, si $|x| \geq 2$, $y=0$
Entonces la gráfica se encuentra dentro de los intervalos $x \in [-2,2]$ y $y \in [-4,4]$
Finalmente hay que ver que conforme x se aleja del cero, y se acerca a este.



(c) $4x^2 - y^2 = -36$

Vemos que para $x=0$, $y = \pm 6$. Si hacemos $y=0$ no podemos encontrar solución real, por lo que la curva nunca corta al eje x.
Podemos hacer dos funciones de x tal que:
$f_1(x) = y = \sqrt{36+4x^2}$
$-f_2(x) = -y = \sqrt{36+4x^2}$

Para $|x| >> 1$ $y = \pm 2|x|$ y $-y = \pm 2|x|$ por lo que dependiendo del signo la dirección de la curva. Conforme $x \to \infty$, $y \to \infty$

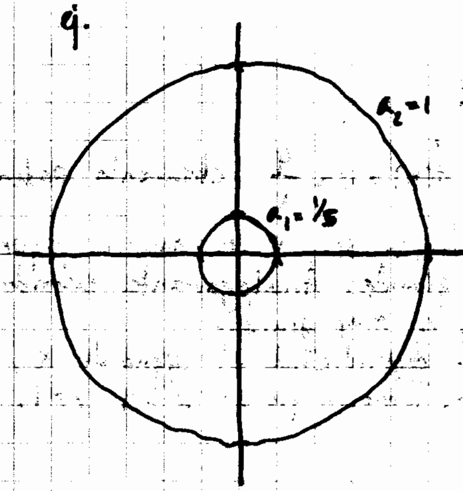


(d) $x^2+y^2=25a^2$

Por un analisis similar a (b) vemos que cuando $x=0$ $y=\pm 5a$
y $y=0$ $x=\pm 5a$

y podemos hacer la gráfica de una curva similar a (b). En este caso, obtenemos una familia de curvas, al dar diferentes valores a a. Se grafican $a_1=1/5$, $a_2=1$

q.



(e) $ay^2=x^3$

Podemos graficar esta familia de curvas en dos partes. Si hacemos
$$y=\pm\left(\frac{x^3}{a}\right)^{1/2}$$
Hacemos la curva positiva y luego la negativa.

Para ambos casos $x=0$, $y=0$.

Analizando:

- $x>0$ $a>0$

En el supuesto de que $a=1$, $y=\pm x^{3/2}$ se comporta tal que $x\to\infty$, $y\to\infty$. Si $a>1$, la curva crece más lenta (ej. $a=1$, $x=9$, $y=27$, si $a=9$, $x=9$, $y=1$)

- $x>0$ $a<0$

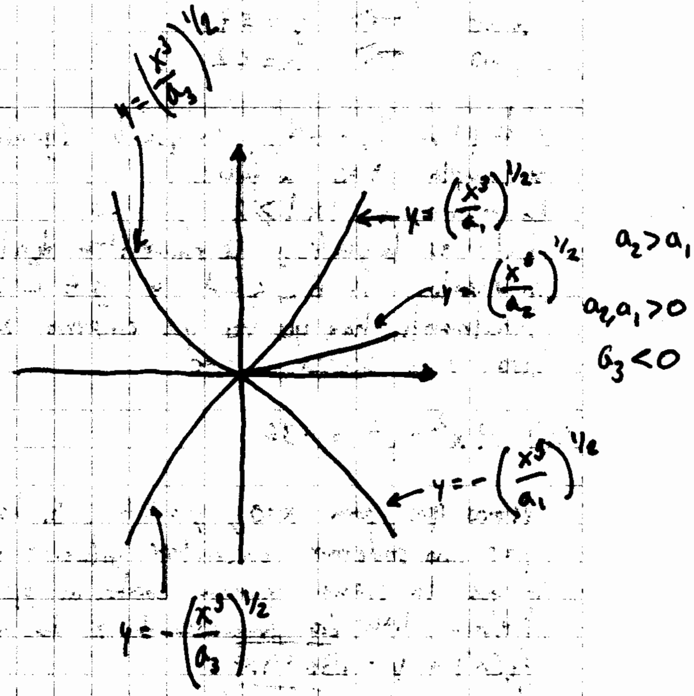
Indefinido, por que la raiz trataría un numero negativo

- $x<0$ $a>0$

Igual que el anterior.

- $x<0$ $a<0$

Similar al primer caso analizado.



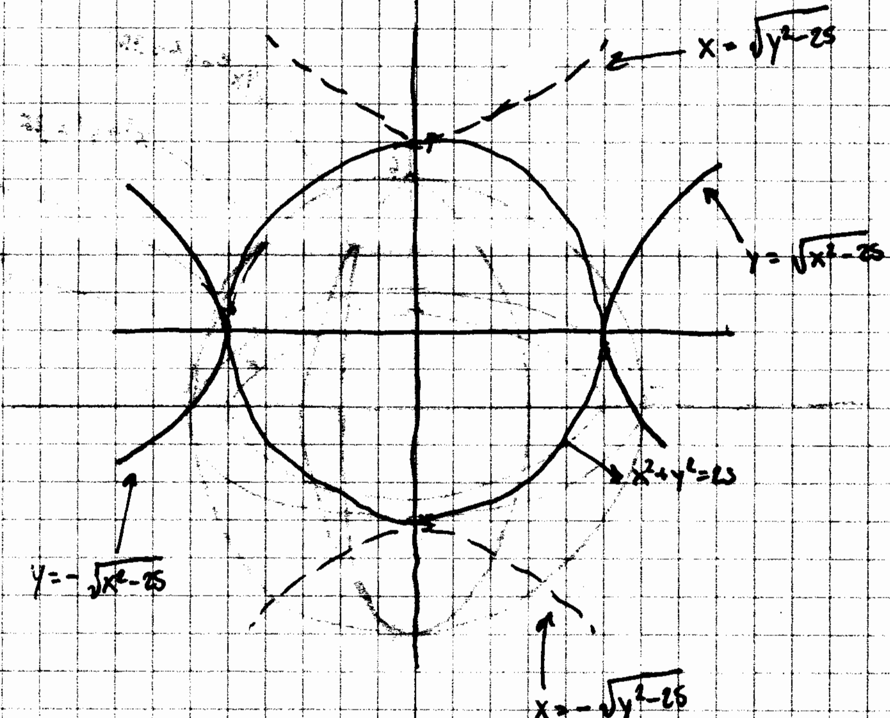
(2)

$x^2+y^2=25$
$x^2-y^2=25$
$-x^2+y^2=25$

* La gráfica de $x^2+y^2=25$ es la gráfica de un círculo con radio de 5. Ya que cuando $x=0$ $y=\pm 5$ y cuando $y=0$ $x=\pm 5$. Además de que $x \in [-5,5]$ y $y \in [-5,5]$.

* Cuando $y=0$, en $x^2-y^2=25$, $x=\pm 5$. Pero cuando $x=0$ que da la raíz de un número negativo por lo que el eje y no es cortado.
Dibujamos la gráfica si $x^2-25=y^2 \longrightarrow y=\pm\sqrt{x^2-25}$ y así vemos que para valores de $-5<x<5$ la gráfica no existe, pero para mayores sí y que cuando $x\to\infty$, $y\to\infty$ y que cuando $x\to-\infty$, $y\to\infty$

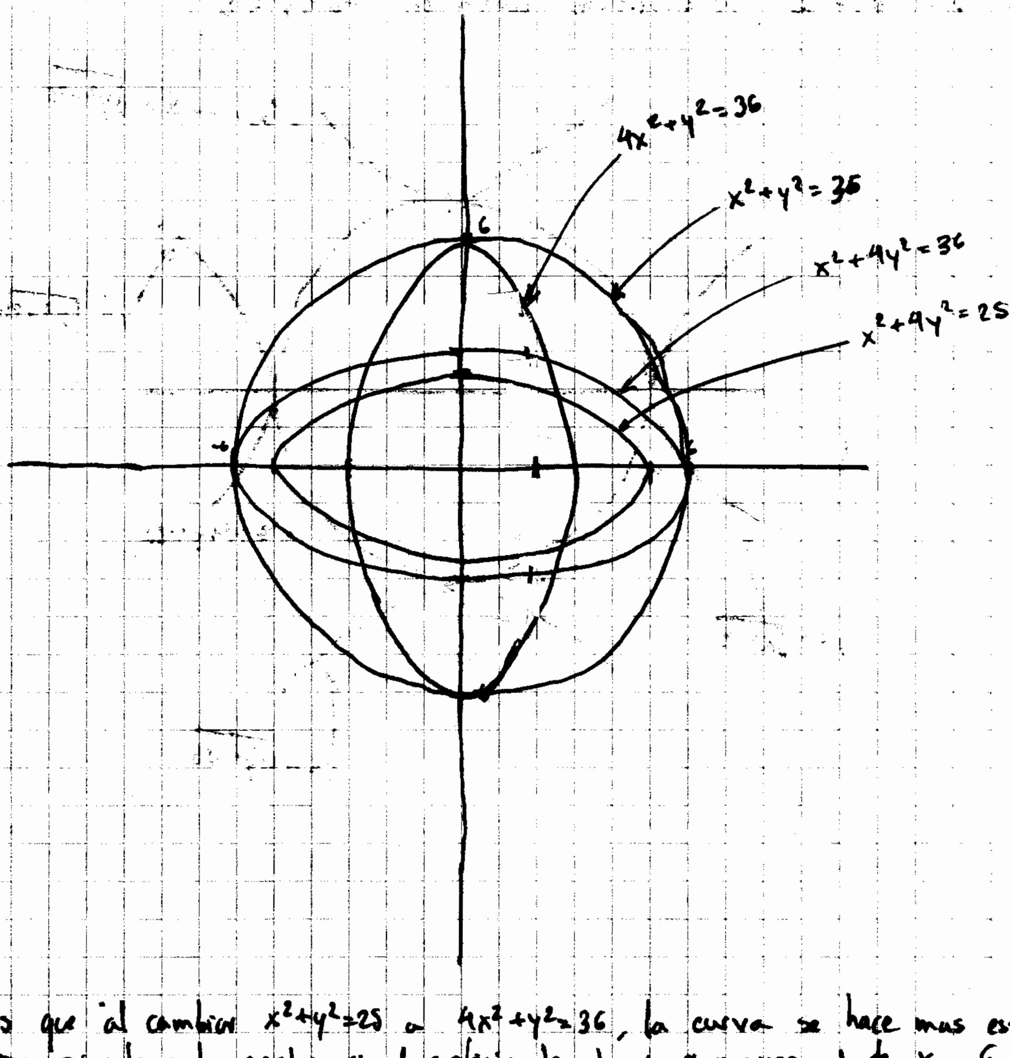
* Análogamente al caso anterior. Cuando $x=0$, en $-x^2+y^2=25$, $y=\pm 5$. Y podemos construir $x=\pm\sqrt{y^2-25}$, no existiendo curva en $-5<y<5$.



(3)

$x^2+y^2=36$
$x^2+4y^2=36$
$4x^2+y^2=36$
$x^2+4y^2=25$

* $x^2+y^2=36$ es la grafica de un circulo con radio 6
* $x^2+4y^2=36$ es una curva cerrada. Cuando $x=0$ $y=\pm 3$. Cuando $y=0$ $x=\pm 6$.
* $4x^2+y^2=36$ es una curva cerrada. Cuando $x=0$ $y=\pm 6$, Cuando $y=0$ $x=\pm 3$
* Al igual que en los dos casos anteriores. $x^2+4y^2=25$ es una curva cerrada. Cuando $x=0$ $y=\pm 5/2$. Cuando $y=0$, $x=\pm 5$.



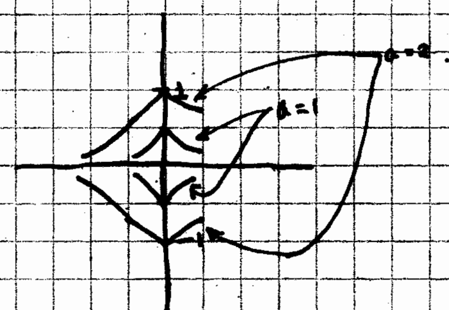
Observamos que al cambiar $x^2+y^2=25$ a $4x^2+y^2=36$, la curva se hace mas estrecha a lo alto; lo mismo sucede a lo ancho si el coeficiente de y es mayor al de x. En el caso de pasar de $x^2+4y^2=36$ a $x^2+4y^2=25$ observamos que la elipse se va haciendo más pequeña, lo cual es de esperarse, pues por analogia al circulo el numero indica cuan grande es la curva.

(k) $y^2 = \dfrac{a^4}{x^2+4a^2}$

El analisis de esta grafica es similar a la de (j). Si $x=0$ $\quad y^2 = \dfrac{a^4}{4a^2} = \dfrac{a^2}{4}$

$y = \pm\dfrac{a}{2}$. Note tambien que $a^4 > 0$ y $x^2+4a^2 > 0$, siempre, por lo que y^2 siempre tendra raices (dos). Tambien cuando $x \to \infty$ $\quad y \to 0$

Asi, podemos pintar:

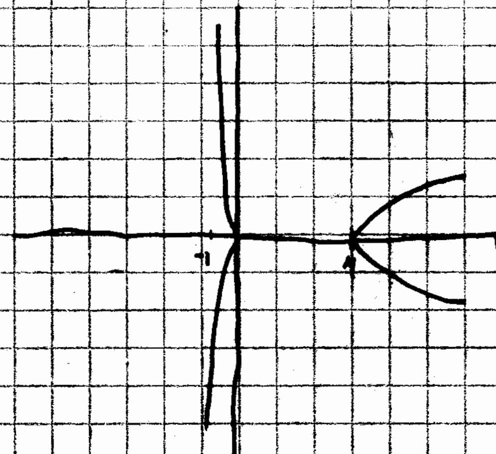


(l) $y^2 = \dfrac{x^2-4x}{x+1} = \dfrac{x(x-4)}{x+1}$

Note que se forma una asintota en $x=-1$. Y que $y^2=0$ cuando $x=0$ y $x=4$
Para $|x| >> 1$ $\quad y^2 \simeq \dfrac{x(x)}{x} = x \Rightarrow y = \pm\sqrt{x}$

Note que y no esta definido en los reales cuando $0 < x < 4$ puesto que $y^2 < 0$ en todo caso. Tampoco se obtienen resultados reales si $x < -1$ pues $y^2 < 0$ en todo caso.

Entonces la curva solo esta definida de $-1 < x < 0$ y de $x > 4$.

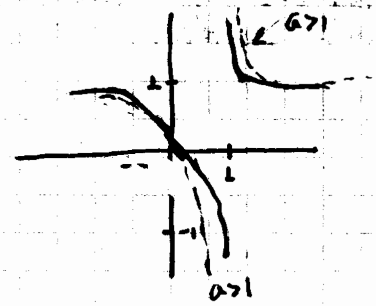


(f) $xy = c + ax + y$

Reacomodando tenemos $y = \frac{c+ax}{x-1}$ podemos ver que existe una asintota cuando $x=1$ también $y=0$ cuando $x=0$. En el caso más simple $c=0$, $a=1$ tenemos una grafica $y=\frac{x}{x-1}$ la cual es una asintota alrededor de $x=1$. Cuando $|x| >> 0$ nos queda que $x-1 \simeq x$ y por ende que $y \simeq 1$

Cuando la x es pequeña, podemos ver que $y \simeq -x$ (esto es $0<x<1$)

la a y la c lo que hacen es aumentar el grado con el que y crece respecto a x.



(g) $y^3+x^3=8$

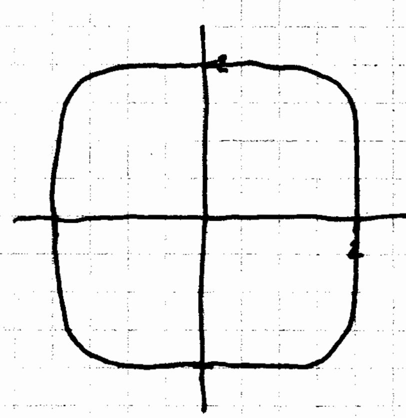
Los puntos más sencillos de encontrar son cuando $x=0$, $y=2$ y cuando $y=0$, $x=2$

Observemos de $y^3=8-x^3$ que cuando $x\to\infty$, $y\to-\infty$ y que cuando $x\to-\infty$, $y\to\infty$. Así, podemos construir su grafica aproximada a sabiendas de que cuando $0<x<2$ $y=\sqrt[3]{z}$ donde z es un número que tiene raíces reales. Y como desde la perspectiva de z, y es una función cubica queda

(h) $y^4+x^4=16$

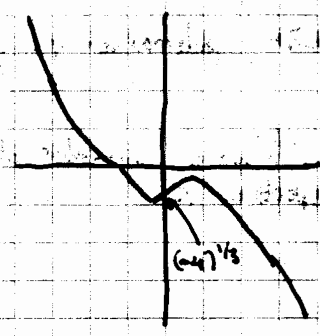
La grafica es similar a una $x^2+y^2=c^2$ ya que $y^4, x^4 > 0$. Los puntos más sencillos, cuando $y=0$, $x=\pm 2$; $x=0$, $y=\pm 2$

La curva es cerrada puesto que para valores de $x>2$ (o $y>2$) la y (o x) esta indefinida. Sin embargo la curva no forma un circulo, pues al ser x (o y) elevados a una potencia 4, el crecimiento de y conforme x se aproxima a 2 (y viceversa) es abrupto. Por ejemplo, al ser $x=1$ tenemos $y^4=15$ que es muy cercano al valor ~~de~~ cuando $x=0$, $y^4=16$.



(i) $x^3+y^3-4x+4=0$

Ya habíamos tratado la forma x^3+y^3 por lo que solo hay que analizar los cambios. Vemos que para $x=0$, $y=\sqrt[3]{4}$. Cuando $|x|>>0$ la función se parece más a $x^3+y^3=0$ y de ahí podemos ver entonces que su comportamiento en esas condiciones es parecido al de (g). Por otro lado, cuando $|x|<<1$, la gráfica es aproximadamente la de $y^3-4x+4=0$ y la curva en ese punto, $y^3=4x-4$ es parecida a la de una recta con pendiente positiva.



(j) $y=\dfrac{a^3}{x^2+a^2}$

no cero

En el caso de que $a=0$, $y=0$ $\forall x$ por lo que solo tienen interés la familia de curvas donde $a\neq 0$. Note también que $x^2+a^2=0$ si y solo si $x=a=0$, así el signo de y depende de a. Hay que ver también que cuando $x=0$, $y=a$ y este es el máximo valor de y ya que al ir $x\to\infty$, $y\to 0$.
Así fácilmente podemos dibujar.