Geometría Analítica I

Una respuesta al Examen 3

Resuelva adecuadamente los siguientes problemas:

1. Encuentre una buena aproximación (6 cifras significativas) para $\sqrt[4]{491}$.

   Se desea encontrar un valor para x tal $x^4 = 491$, naturalmente, x debe ser un valor positivo, entre los posibles.

   Si observamos $f(x) = x^4$, se nos pide localizar un valor para x tal que la gráfica de $f(x)$ corte a la recta $y = 491$, es decir; encontrar x tal que $f(x) = 491$.

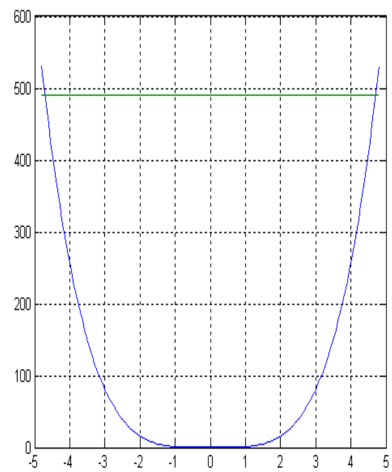

Figura 1: El problema transformado.

   Este problema lo podemos transformar en localizar un cero (adecuado) para $g(x) = f(x) - 491$.

   Resolvamos por Newton para localizar un cero de $g(x)$. El método de Newton consiste en partir de una solución aproximada x_1 y corregirla en la forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

   Se propone como punto de partida $x_1 = 4$, ya que $4^4 = 256$ y $5^4 = 625$.

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} \\ &= 4 - \frac{-235}{256} \\ &= 4.917968750 \end{aligned}$$

hagamos algunos pasos

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 - \frac{g(x_2)}{g'(x_2)} \\ &= 4.917968750 - \frac{93.9827492}{4.7579216e+2} \\ &= 4.720439752 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_4 &= x_3 - \frac{g(x_3)}{g'(x_3)} \\ &= 4.720439752 - \frac{5.51209950}{4.2073376e+2} \\ &= 4.707338594 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_5 &= x_4 - \frac{g(x_4)}{g'(x_4)} \\ &= 4.707338594 - \frac{0.0229050}{4.17240353e+2} \\ &= 4.707283698 \end{aligned}$$

y por último

$$\begin{aligned} x_6 &= x_5 - \frac{g(x_5)}{g'(x_5)} \\ &= 4.707283698 - \frac{4.0067283e-7}{4.17225756e+2} \\ &= 4.707283697 \end{aligned}$$

dado que $|x_6 - x_5|/|x_5| = 2.040077781 - 10 < 1e - 6$, hemos encontrado una buena aproximación para $\sqrt[4]{491}$. (Nota: de haber iniciado con $x_1 = 5$, en menos pasos se tendría una buena aproximación, esto se debe a la pendiente de la curva, en $x = 5$).

2. Describa la forma de la gráfica de $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 6x - 8$ y encuentre sus ceros.

   Consideremos $g(x) = 2x^3 - 4x^2 - 6x$, función cúbica, analicemos esta para entender $f(x)$.

   La función de $g(x)$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} g(x) &= 2x^3 - 4x^2 - 6x \\ &= 2x(x^2 - 2x - 3) \\ &= 2x(x+1)(x-3) \end{aligned}$$

La cual se comporta como x^3 globalmente (para $|x| \gg 1$) y tiene 3 ceros, los cuales se localizan en $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 3$. Por otra parte, para $|x| \ll 1$ esta función representa localmente una recta $y = -6x$.

Ahora bien, la función, $f(x)$, localmente se comporta como una parábola. Para $x \approx 0$, el término cúbico no cuenta, teniendo

$$f(x) \approx -4x^2 - 6x - 8$$

Ahora bien, para $x = 0$, $f(x) = 0$, como este es un cero para $g(x)$, presumiblemente $f(x)$ sólo tenga un cero. Con, esto, ya podemos dar un primer trazo de la curva de esta gráfica. Para completar el análisis bastaria localizar los restantes ceros de la función.

Usando $x = 3$, como punto de partida para el método de Newton, tenemos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\ &= 3 - \frac{-8}{24} \\ &= 3.33333333 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \\ &= 3.33333333 - \frac{1.62962962}{34} \\ &= 3.285403050 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \\ &= 3.285403050 - \frac{0.036536771}{32.480014809} \\ &= 3.284278150 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_5 &= x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} \\ &= 3.284278150 - \frac{1.987965009e-5}{32.44467260} \\ &= 3.284277537 \end{aligned}$$

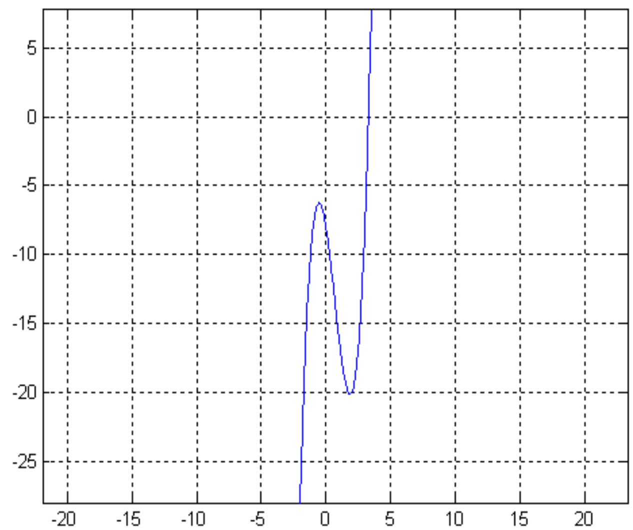

Figura 2: Gráfica de $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 6x - 8$.

El cero de $f(x)$ se encuentra aproximadamente en $x^* = 3.284277537$, y es este el único cero.

3. Describa la familia de curvas representadas por

$$p(x) = x^4 - ax^2; \text{ para } a \in \mathbb{R}.$$

El análisis global de $f(x)$ nos dice que esta función se comporta como $y = x^4$ para $x \gg 1$, a través del análisis local, para $|x| \ll 1$, observamos que $f(x)$ se comporta como la parábola $y = -ax^2$, esto es, cerca de $x = 0$, se tiene una parábola (que abre hacia abajo, o bien hacia arriba, dependiendo del signo de $-a$).

Por una parte tenemos que $p(x)$ se puede escribir como $p(x) = x^2(x^2 - a)$, que tiene un cero de multiplicad 2 en $x = 0$. Ahora bien, a varía sobre $\mathbb{R}$, por ello, consideremos dos casos $a > 0$ y $a < 0$.

Caso $a > 0$. Para este caso, el factor $(x^2 - a)$, tiene dos ceros, uno en $x_3 = \sqrt{a}$, y el otro para $x_4 = -\sqrt{a}$. Con esto, $p(x)$ tiene 4 ceros, dos de multiplicad doble en $x = 0$ y dado que localmente se comporta alrededor de $x = 0$ se comporta como una parábola que habre hacia abajo, se observa que para valores de a grande, la "cazuela", se abre en demasía.

Caso $a < 0$. Para este caso, el factor $(x^2 - a)$, No cuenta con ceros. Por consiguiente la gráfica de la función se comporta como x^4 que crece aun más que ax^2, crece en suma, ambos son positivos

Desde luego, $a = 0$ entra en cualquiera de los casos, como límite, o bien, analizando x^4 que es la base del presente análisis.

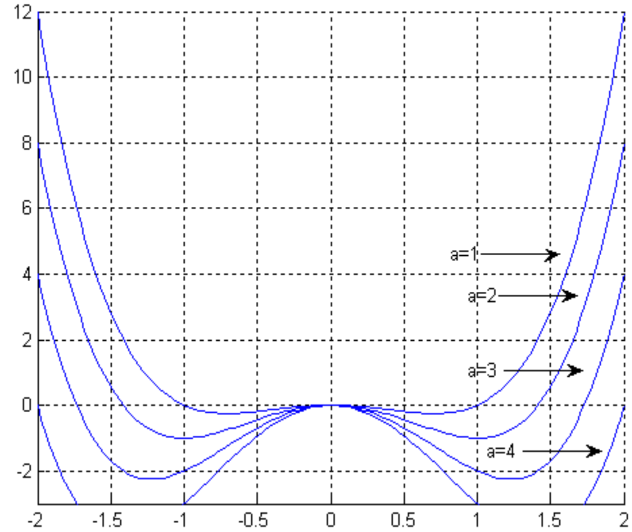

Figura 3: Caso $a > 0$.

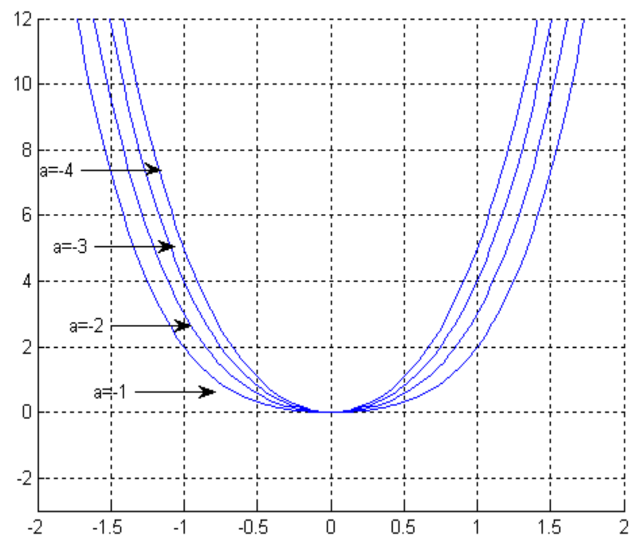

Figura 4: Caso $a < 0$.

4. Construya un polinomio cúbico, donde dos de sus ceros sean $x_1 = -1$, $x_2 = 4$ y que en $x_3 = 2$ se comporte localmente como la recta $y = 2x - 5$.

   Consideremos el desarrollo de Taylor del polinomio cúbico lo largo del punto $x = 3$, este es

$$p(x) = a(x-2)^3 + b(x-2)^2 + c(x-2) + d$$

   Se sabe que alrededor de $x = 3$, $p(x)$ se comporta como $2x - 6$, del análisis local, para $x \approx 3$, $p(x) \approx c(x-2) + d$, con esto, dado que dos polinomios son iguales si sus términos correspondientes son iguales, se sigue que $c = 2$, y $d = -1$

   De la condición de que $p(-1) = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} p(-1) &= a(-3)^3 + b(-3)^2 + 2(-3) - 1 = 0 \\ &= -27a + 9b - 7 = 0 \end{aligned}$$

   y de la condición $p(4) = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} p(4) &= a(2)^3 + b(2)^2 + 2(2) - 1 = 0 \\ &= 8a + 4b + 3 = 0 \end{aligned}$$

   el sistema se resuelve y obtenemos el único polinomio de grado 3, que satisface esas condiciones.

Tiempo estimado invertido: 1:10 hrs.