UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Profesor: Pablo Barrera Sánchez. — Geometría Analítica I

Alumno: Felipe de Jesús Cerda Hernández. — Grupo: 4048

TAREA (12 de Septiembre de 2005) [Fecha Entrega: 1/Sep/05]

I. Esbozar la gráfica de la siguiente función racional:

$$y = \frac{x(x-3)}{(x+2)(x-1)}$$

Primero, podemos observar que la gráfica de la función anterior tiene dos ceros, uno en $x=0$ y el segundo en $x=3$.
Asimismo, al observar el denominador podemos ver que la gráfica presenta discontinuidad y, por lo tanto, tiene un comportamiento asintótico en las rectas determinadas por $x=-2$ y $x=1$. (Fig. 1)

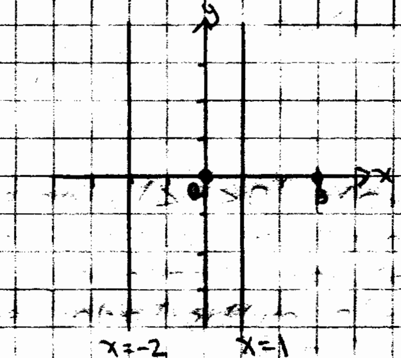

Fig. 1.

Para graficar esta curva, podemos hacer una pequeña analogía entre la función racional "y" con las leyes de los signos. Por ejemplo, la función está formada de cuatro expresiones: x, $x-3$, $x+2$ y $x-1$. Así, nos podemos fijar que si tomamos valores menores a $x=-2$ (donde se ubica uno de los polos), entonces el valor de y será positiva, es decir, que si $x<-2$ la gráfica está sobre el eje x (por encima de él, como una asíntota vertical). Para mostrar la analogía antes planteada tomemos $x=-3$:

$$y = \frac{x(x-3)}{(x+2)(x-1)} \Rightarrow y = \frac{(-3)(-3-3)}{(-3+2)(-3-1)} > 0 \rightarrow \text{Positivo}$$

$$y = \frac{(-)(-)}{(-)(-)} = \frac{(+)}{(+)} = (+) > 0$$

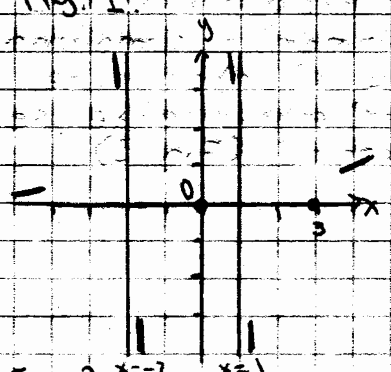

Fig. 2.

Entonces sabemos que en esa parte, la gráfica tiene un comportamiento asintótico para con el eje x como para la recta $x=-2$ (Fig. 2)

Al analizar el otro "extremo" de la curva discontinua vemos que hay un cero en $x=3$. Asimismo, siguiendo la analogía anterior, observamos que para $1<x<3$, y es negativa; pero para $x>3$ y es positiva. Por tanto, la gráfica tiene asíntota en $x=-1$ y cero en $x=3$, y va de valores negativos a positivos. (Fig. 2)

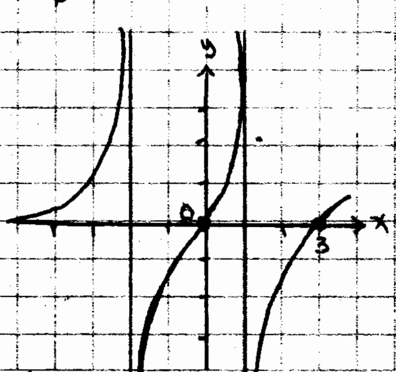

Fig. 3.

Profesor: Pablo Barrera Sánchez. | Geometría Analítica I
Alumno: Felipe de Jesús Cerda Hernández. | Grupo: 4048

TAREA (12 de Septiembre de 2005)

I. Ahora sólo falta analizar la gráfica en el intervalo $-2 \le x \le 1$, donde salta a la vista la presencia de un cero de "y" en el origen del plano cartesiano.
Podemos apreciar que para valores entre $x=-2$ y $x=0$ (último punto donde se halla la raíz) hacen que las expresiones x, $x-3$ y $x-1$ sean negativas y que $x+2$ sea positiva. Por la analogía planteada al principio de esta tarea con las leyes de los signos, podemos suponer que en esta zona y es negativa (Fig. 2)

Por ejemplo, para $x=-1$:

$$y = \frac{x(x-3)}{(x+2)(x-1)} = \frac{(-1)(-1-3)}{(-1+2)(-1-1)} < 0 \Rightarrow \text{Negativo}$$

$$y = \frac{(-)(-)}{(+)(-)} = \frac{(+)}{(-)} = (-)$$

Así, sólo nos queda analizar el intervalo $0 \le x \le 1$, en el que podemos ver que la gráfica es positiva pues arroja para el numerador una expresión negativa y para el denominador también y, de acuerdo a la multicitada ley de los signos, el cociente es positivo. (Fig. 2)

Finalmente, podemos observar de acuerdo a nuestros datos, que la gráfica de y se comporta como una cúbica en la vecindad de puntos entre el interior de las dos asíntotas verticales, y que exteriormente se parece como a una hipérbola "separada" (Fig. 3).