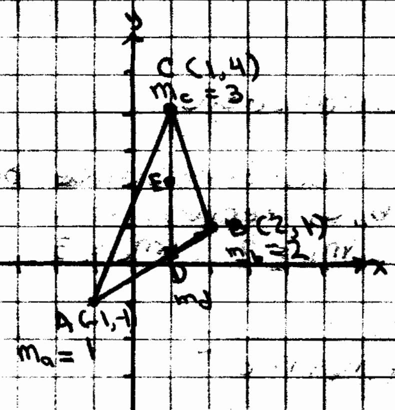
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

Profesor: Pablo Barrera Sánchez | Geometría Analítica I
Alumno: Felipe de Jesús Cerda Hernández | Grupo: 4048

Tarea (22 de Agosto de 2005) [Fecha Entrega: 24/Ago/05]

I. Hallar el centro de masa —baricentro— de cada uno de los tres siguientes sistemas propuestos. Cada uno de los sistemas cuenta con tres puntos sobre los que se encuentra colocado una de las masas que ejercen fuerza sobre el sistema. Para fines prácticos, se supondrán las coordenadas de tales puntos como sujetas al libre albedrío, es decir, las coordenadas serán propuestas al gusto siempre y cuando la unión entre dichos puntos forme una figura triangular no colineal.

1) $m_a = 1$
$m_b = 2$
$m_c = 3$



Durante la clase del 23 de Agosto, impartida por el ayudante Guilmer González, se discutió el método para poder resolver estos problemas. Se convino en obtener primero el centro de masa entre los puntos A y B —llamando D a este punto—; y después encontrar el punto de equilibrio E como el resultado de relacionar las masas m_c y m_d.
Se define m_d como la suma de m_a y m_b.
No obstante lo anterior, y con el objetivo de normalizar las coordenadas es recomendable llegar a una fórmula para encontrar a D y sustituirla en otra fórmula para obtener las coordenadas del punto E, como se muestra a continuación:

$$A\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1,-1)$$

$$B\begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (2,1)$$

$$C\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = (1,4)$$

$$D = \frac{m_a}{m_a + m_b} A + \frac{m_b}{m_a + m_b} B \quad \ldots (I)$$

$$E = \frac{m_c}{m_c + m_d} C + \frac{m_d}{m_c + m_d} D = \frac{m_c}{m_c + (m_a + m_b)} C + \frac{(m_a + m_b)}{m_c + (m_a + m_b)} D$$

Se sustituye D por la ecuación de arriba (Ec. I)

$$E = \frac{m_c}{m_a + m_b + m_c} C + \frac{m_a + m_b}{m_a + m_b + m_c}\left[\frac{m_a}{m_a + m_b} A + \frac{m_b}{m_a + m_b} B\right]$$

$$E = \frac{m_c}{m_a + m_b + m_c} C + \frac{m_a \cancel{(m_a + m_b)}}{(m_a + m_b + m_c)\cancel{(m_a + m_b)}} A + \frac{m_b \cancel{(m_a + m_b)}}{(m_a + m_b + m_c)\cancel{(m_a + m_b)}} B$$

(Continua al reverso de la hoja)

Profesor: Pablo Barrera Sánchez | Geometría Analítica I

Alumno: Felipe de Jesús Cerda Hernández | Grupo: 4048

Jueves (22 de agosto de 2005) [Fecha Entrega: 24/Ago/05]

Se simplifica la expresión anterior, después de reducir términos, para que la fórmula del punto E ó baricentro quede de la siguiente manera:

$$E = \frac{m_a}{m_a+m_b+m_c}A + \frac{m_b}{m_a+m_b+m_c}B + \frac{m_c}{m_a+m_b+m_c}C \quad (2)$$

$$E = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

siempre y cuando $\alpha+\beta+\gamma=1$,

con lo que las coordenadas quedarían normalizadas.

Ahora sí, se encontrarán las coordenadas del punto E mediante la fórmula (2), en que A, B, C, representan las coordenadas de estos puntos. $m_a = 1$, $m_b = 2$, $m_c = 3$.

$$E = \frac{m_a}{m_a+m_b+m_c}A + \frac{m_b}{m_a+m_b+m_c}B + \frac{m_c}{m_a+m_b+m_c}C$$

$$E = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + \frac{2}{6}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \frac{3}{6}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

donde $\alpha = \frac{1}{6}$, $\beta = \frac{2}{6}$, $\gamma = \frac{3}{6} \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma = \frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6} = 1$

$$E = \begin{pmatrix}-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{6}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\2\end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix}1\\\frac{13}{6}\end{pmatrix}$$

Finalmente, el baricentro E tiene coordenadas $(x,y) = (1, \frac{13}{6})$, o dicho de otro modo E(1, 2.16), y que también se expresa

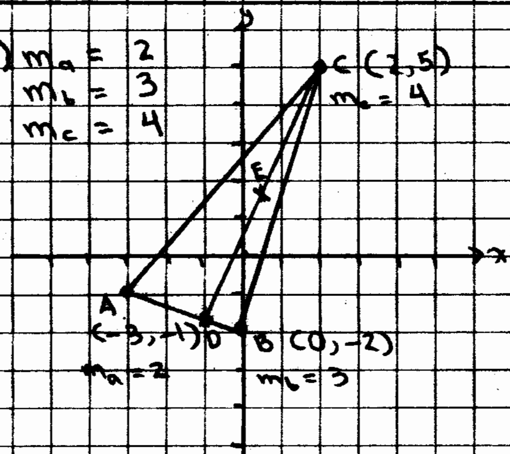
$$E\begin{pmatrix}x_e\\y_e\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\\frac{13}{6}\end{pmatrix} = (1, \tfrac{13}{6})$$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

Profesor: Pablo Barrera Sánchez.	Geometría Analítica I
Alumno: Felipe de Jesús Cerda Hernández.	Grupo: 4048

TAREA (22 de Agosto de 2005) [Fecha Entrega 24/Ago/05]

2) $m_a = 2$
$m_b = 3$
$m_c = 4$



$A\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = (-3,-1)$

$B\begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = (0,-2)$

$C\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = (2,5)$

Siguiendo el proceso descrito en el ejercicio anterior, podemos utilizar inmediatamente la fórmula para hallar el punto E (baricentro).

$$E = \frac{m_a}{m_a+m_b+m_c}A + \frac{m_b}{m_a+m_b+m_c}B + \frac{m_c}{m_a+m_b+m_c}C$$

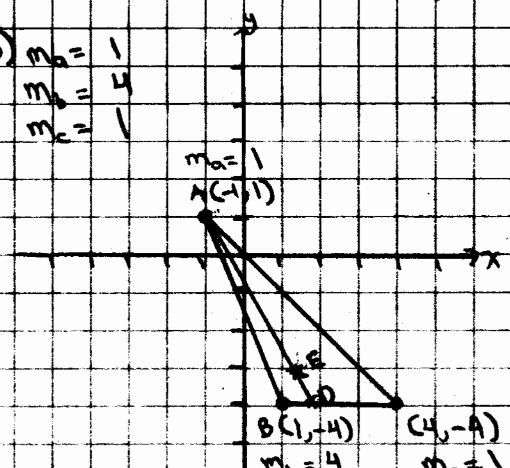
$$E = \frac{2}{2+3+4}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2+3+4}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{4}{2+3+4}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{2}{9}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{9}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{4}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

donde $\alpha = \frac{2}{9}$; $\beta = \frac{3}{9}$; $\gamma = \frac{4}{9} \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \frac{4}{9} = 1$

$$E = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{9} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ \frac{20}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow E = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

---

3) $m_a = 1$
$m_b = 4$
$m_c = 1$



$A\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1,1)$

$B\begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = (1,-4)$

$C\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = (4,-4)$

Repetimos el proceso anterior para ubicar el punto de equilibrio E.

$$E = \frac{m_a}{m_a+m_b+m_c}A + \frac{m_b}{m_a+m_b+m_c}B + \frac{m_c}{m_a+m_b+m_c}C = \frac{1}{1+4+1}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{1+4+1}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+4+1}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$E = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ -\frac{19}{6} \end{pmatrix} \Rightarrow E = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ -\frac{19}{6} \end{pmatrix} = \left(\frac{7}{6}, -\frac{19}{6}\right)$$

donde $\alpha = \frac{1}{6}$; $\beta = \frac{4}{6}$; $\gamma = \frac{1}{6} \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = 1$