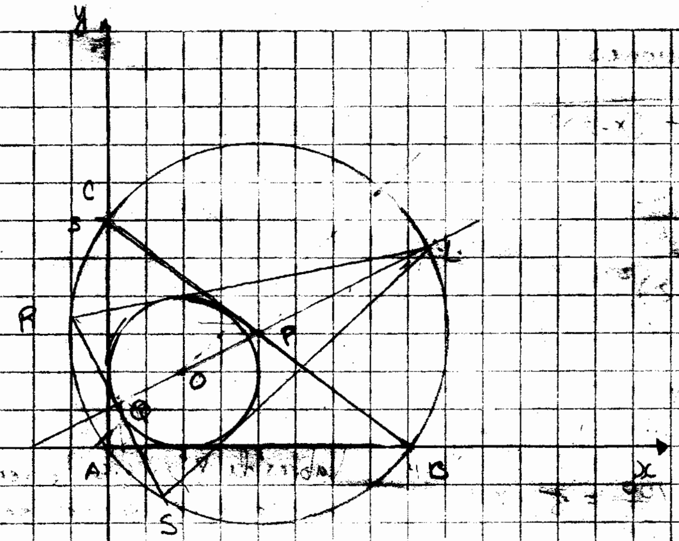
Tarea Geometría Analítica — Gilberto Gómez Correa

Prof Pablo Barrera



Por construcción tenemos el Δ rectángulo de 3,4,5 de lado. Circunscribimos un círculo al Δ ABC y un círculo inscrito al mismo triángulo.

Las coordenadas de los centros son: ○ inscrito: $O(1,1)$ (intersección de las bisectrices)

○ circunscrito: $P(2,\frac{3}{2})$ (intersección de las mediatrices)

Ahora trazamos una recta que pase por O y P y extendemos hasta que toque en dos puntos al círculo mayor. Ahora, desde el punto L trazamos dos rectas tangentes al círculo menor y que intersectan al círculo mayor. Les llamaremos R y S a estos puntos y los unimos con otra recta para formar el triángulo RSL, con sus lados tangentes al círculo menor. Los radios se conocen por construcción, 1 y 2.5

Encontrar los puntos R, S, L y Q y demostrar que la recta RS es tangente al círculo menor.

Obtengamos la ecuación de la recta OP

$O(1,1)$

$P(2,\frac{3}{2})$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\frac{3}{2}-1}{2-1}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$$

$$y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y-1=\tfrac{1}{2}(x-1)$$

$$y-1=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$$

$$y=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}$$

$$y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\boxed{\tfrac{1}{2}(x+1)=y}$$

Obtengamos la ecuación de la circunferencia mayor.

$P=(2,\frac{3}{2})$. $\quad (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$r=\frac{5}{2}$ $\quad (x-2)^2+(y-\frac{3}{2})^2=(\frac{5}{2})^2$

despejando y $\quad (y-\frac{3}{2})^2=(\frac{5}{2})^2-(x-2)^2$

$$y=\frac{3}{2}+\sqrt{(\tfrac{5}{2})^2-(x-2)^2}$$

Igualando en Y ambas ecuaciones

$$\frac{1}{2}(x+1) = \frac{3}{2} + \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - (x-2)^2}$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - (x-2)^2}$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{2}{2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - (x-2)^2}$$

$$\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - (x-2)^2$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - (x-2)^2$$

$$(x-2)^2 = 4\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4(x-2)^2$$

$$5(x-2)^2 = 4\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$(x-2)^2 = \frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4} = \frac{100}{20} = 5$$

$$x-2 = \pm\sqrt{5}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{5}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 2+\sqrt{5} \approx 4.23 \\ x_2 &= 2-\sqrt{5} \approx -0.23 \end{aligned}}$$

Valores de X en que la recta con OP y el círculo circunscrito se intersectan

Tomamos la raíz positiva dado que es la que tiene sentido para el problema (Encontrar L)

Evaluando el valor de X en la ecuación de la recta obtenemos las coordenadas de L

$$\frac{1}{2}(x+1) = y$$

$$\frac{1}{2}(4.23+1) = y$$

$$\frac{1}{2}(5.23) = y$$

$$2.615 = y$$

$$\boxed{L(4.23,\ 2.615)}$$

Ahora encontremos la ecuación del círculo menor

O(1, 1)

radio = 1

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

$$y = 1 + \sqrt{1-(x-1)^2}$$

Igualando Y en la ecuación anterior y la de la recta OP tenemos

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{1-(x-1)^2}$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = \sqrt{1-(x-1)^2}$$

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = 1-(x-1)^2$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} = 1-(x-1)^2$$

$$(x-1)^2 = 4 - 4(x-1)^2$$

$$5(x-1)^2 = 4$$

$$(x-1)^2 = \frac{4}{5}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 1+\sqrt{\tfrac{4}{5}} \approx 1.89 \\ x_2 &= 1-\sqrt{\tfrac{4}{5}} \approx 0.105 \end{aligned}}$$

Valores de X en que la recta con OP y el círculo inscrito se intersectan

Tomaremos X_2 dado que es el valor más cercano al origen y es la componente X del punto Q

Evaluando el valor de x en la ecuación de la recta obtenemos las coordenadas de Q.

$$\frac{1}{2}(x+1)=y$$
$$\frac{1}{2}(0.105+1)=y$$
$$\frac{1}{2}(1.105)=y$$
$$0.5525=y$$

$$\boxed{Q(0.105,\ 0.5525)}$$

El punto Q forma parte de la colección de puntos de la circunferencia inscrita y la recta QO es un radio de este círculo.
Por geometría del círculo al ser OQ un radio existe una y sólo una recta tangente al punto Q y esta recta tangente es perpendicular al radio OQ

$m=\frac{1}{2}$ de OQ porque Q, O y P son colineales.
$Q(0.105,\ 0.55)$

Calculando la recta tangente.

$$m_1 m_2=-1$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)m_2=-1$$
$$m_2=\frac{-1}{1/2}=-2$$ es la pendiente de la recta tangente.

$$y-y_1=m(x_1-x)$$
$$y-0.55=-2(x-0.105)$$
$$y-0.55=-2x+0.21$$
$$y=-2x+0.21+0.55$$
$$y=-2x+0.76$$

Igualando Y en la ecuación anterior y la del círculo circunscrito.

$$-2x+0.76=\frac{3}{2}+\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-(x-2)^2}$$
$$-2x-0.74=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-(x-2)^2}$$
$$(-2x-0.74)^2=\frac{25}{4}-(x-2)^2$$
$$(-2x-0.74)^2+(x-2)^2=\frac{25}{4}$$
$$4x^2+2.96x+0.5476+x^2-4x+4-\frac{25}{4}=0$$
$$5x^2-1.04x-1.7024=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\left[1.04\pm\sqrt{1.0816-4(5)(-1.7)}\right]/10$$

$$x=\frac{1.04\pm\sqrt{35.08}}{10}$$

$$X = \frac{1.04 \pm \sqrt{35.08}}{10}$$

$$X_1 = \frac{1.04 + 5.92}{10} = 0.697$$

$$X_2 = \frac{1.04 - 5.92}{10} = -0.487$$

Valores de x para los cuales la recta tangente y el circulo circunscrito se intersectan

Evaluando los valores obtenidos en la recta tangente obtenemos

$$y = -2x + 0.76$$

$$y_1 = -2(0.697) + 0.76 = -0.634 \Rightarrow \boxed{S(0.697, -0.634)}$$

$$y_2 = -2(-0.487) + 0.76 = 1.734 \Rightarrow \boxed{R(-0.487, 1.734)}$$

Demostración del porqué la la recta BD es tangente al circulo con centro O

La figura utilizada en la tarea es esta (fig 1)

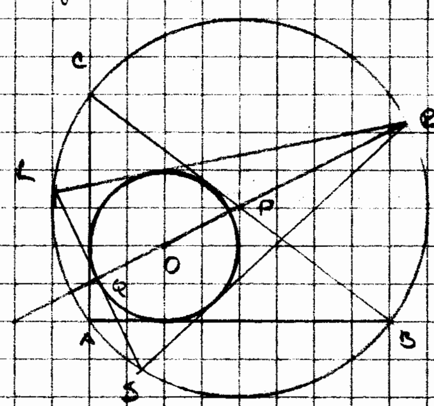
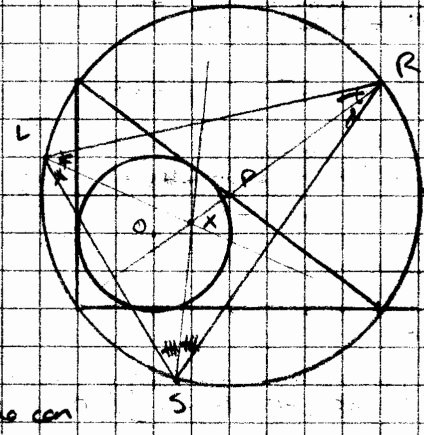


Fig 1.

Supongamos que LS no es tangencial al circulo inscrito y además intersecta al circulo P en el punto $\angle RS$. Dada esta construcción (fig 2) trazamos el centro del círculo conteniendo en el i.e. trazamos sus bisectrices.

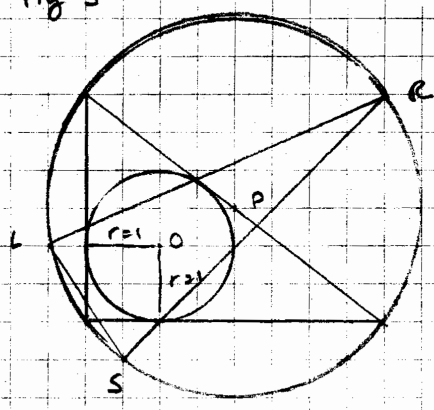


El centro de tal circulo se encuentra en el punto X, y por construcción (fig 1) el centro del circulo inscrito en el $\triangle BAD$ debe estar en Q

$\therefore$ BD no pasa por adentro del circulo con centro Q

Ahora supongamos que LS no es tangente al circulo con centro O y que intersecta al circulo con centro O en los puntos R L S

Fig 3



Dada esta construcción notamos que el Δ RLS es incapaz de contener un circulo con centro en O y radio =1

$\therefore$ LS no pasa por afuera del circulo

Como conclusión el Δ LSR, es capaz de inscribir un circulo con centro en O y radio = 1, y además está circunscrito en un circulo de R=2.5 y centro P.

$\therefore$ LS es tangente al circulo con radio r=1 y centro O