Cruz Sosa Francisco

Idea de la Demostración de Ptolomeo.

Ptolomeo trata de demostrar que para los cuadriláteros cíclicos, en sí el teorema de Ptolomeo es un seguimiento al teorema de Brahmagupta. Y Este afirma que, $mn = ac + bd$, es decir que el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de lados opuestos.

Por ejemplo: enuncia que un cuadrilatero ABCD. Y dice que se traza un segmento para que se formen angulos semejantes y que al comparar los angulos semejantes y hacer desigualdades para obtener el valor de las diagonales. por lo que se demostro anteriormente, pues no encuentro caso enunciar todo el teorema cuando ya se demostro.

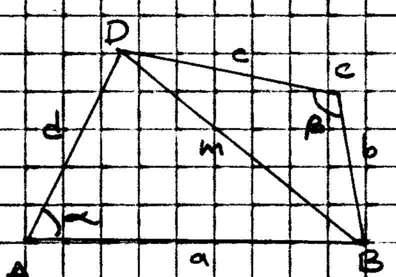
Muestre que el área de cualquier cuadrilátero cíclico $Q(a,b,c,d)$ se puede escribir en la forma

$$\text{Area}(a,b,c,d) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$

Para un cuadrilátero cíclico esta formula sirve, pues su demostración, demuestra que sirve para cuadrilateros cíclicos. en sí esta formula se asemeja o mas bien es la formula de Brahmagupta.

Consideremos un cuadrilatero; El área K del cuadrilátero es la suma de los $\triangle$ ABD y CBD.



por lo tanto

$$K^2 = ((ABD) + (CBD))^2 = \frac{1}{4}(ab \operatorname{sen}\alpha + cd \operatorname{sen}\beta)^2 =$$

$$\frac{1}{4}(a^2b^2\operatorname{sen}^2\alpha + c^2d^2\operatorname{sen}^2\beta + 2abcd\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)$$

Aplicando el teorema del coseno a los $\triangle$ ABD y CBD,

$$m^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

$$m^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta,$$

y Restando ambas ecuaciones,

$$2ab\cos\alpha - 2cd\cos\beta = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$$

y si se eleva al ² y se divide por 16.

$$\frac{1}{4}\left(a^2b^2\cos^2\alpha + c^2d^2\cos^2\beta - 2abcd\cos\alpha\cos\beta\right) = 1/16\,(a^2+b^2-c^2-d^2)$$

De esta igualdad, el 1er miembro se suma y el segundo lo restamos al 2do miembro de la igualdad.

$$K^2 = 1/4\,(a^2b^2\operatorname{sen}^2\alpha + c^2d^2\operatorname{sen}^2\beta + 2abcd\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)$$

y tenemos que la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$;

$$K^2 = 1/4\,\left(a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcd\,(\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta - \cos\alpha\cos\beta)\right) - 1/16\,(a^2+b^2-c^2-d^2) =$$

$$= \frac{4a^2b^2 + 4c^2d^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{16} - \frac{abcd\cos(\alpha+\beta)}{2} =$$

$$\frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2 - a^4 - b^4 - c^4 - d^4}{16} -$$

$$\frac{abcd\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

El numerador de la 1a fracción se puede factorizar si sumamos y restamos 8abcd, quedando

$$K^2 = \frac{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{16} -$$

$$\frac{abcd}{2} - \frac{abcd\cos(\alpha+\beta)}{2} = (s-a)(s-b)(s-c)(s-c) -$$

$$abcd\,\frac{1+\cos(\alpha+\beta)}{2} = (s-a)(s-b)(s-d)(s-c) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Encuentre el centro del círculo inscrito en el cuadrilátero cíclico Q (4, 4, 3, 3)

Un círculo esta inscrito en el cuadrilátero cuando sus lados del cuadriláteros son tangentes a la circonferencia, pues en el cuadrilatero en cada una de sus lados existe uno y solo un punto que pertenece a la circonferencia.

Ahora hay que fijarse que en los lados AD y AB son tangentes trazados desde el punto A y que CB y CD son tangentes desde C

La condición necesaria y suficiente "según una pag de Internet" es que para que un cuadrilatero circunscribible es que la soma de los lados opuestos valga lo mismo, según esta información el centro de la circonferencia es = a la intersección de las bisectrices de los ∡ interiores del cuadrilatero.

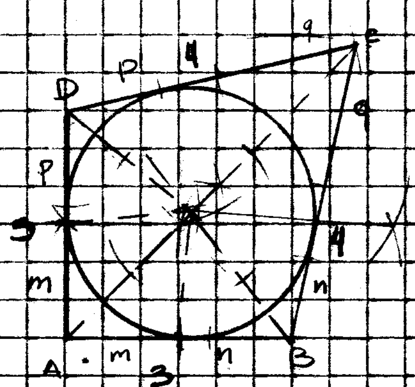
$AB + CD = BC + DA$

Tenemos que $AB = m+n$, $BC = n+q$, $CD = p+q$, $DA = p+m$

$\therefore$

$AB + CD = (m+n) + (p+q) = m+n+p+q$; $BC + DA = (n+q) + (p+m) = m+n+p+q$

Consecuentemente $AB + CD = BC + DA$



Para encontrar su punto medio, atendí a las indicaciones de arriba y en si solo saqué la bisectriz de los ángulos que lo conforman y sabiendo que se forman ∡ semejantes tengo que el punto medio de A y B o cualquera de los otros = a la del ∡ O en AB y AD y tenemos que

como son Δ semejantes lo que lo conforman a A y D, B se dice que para C solo se toma el angulo semejante que conforman A, D y B aunque también la bisectriz en el ∡ OB y OC es igual a la perpendicular de la tangente de CB; y simetrico a DC.

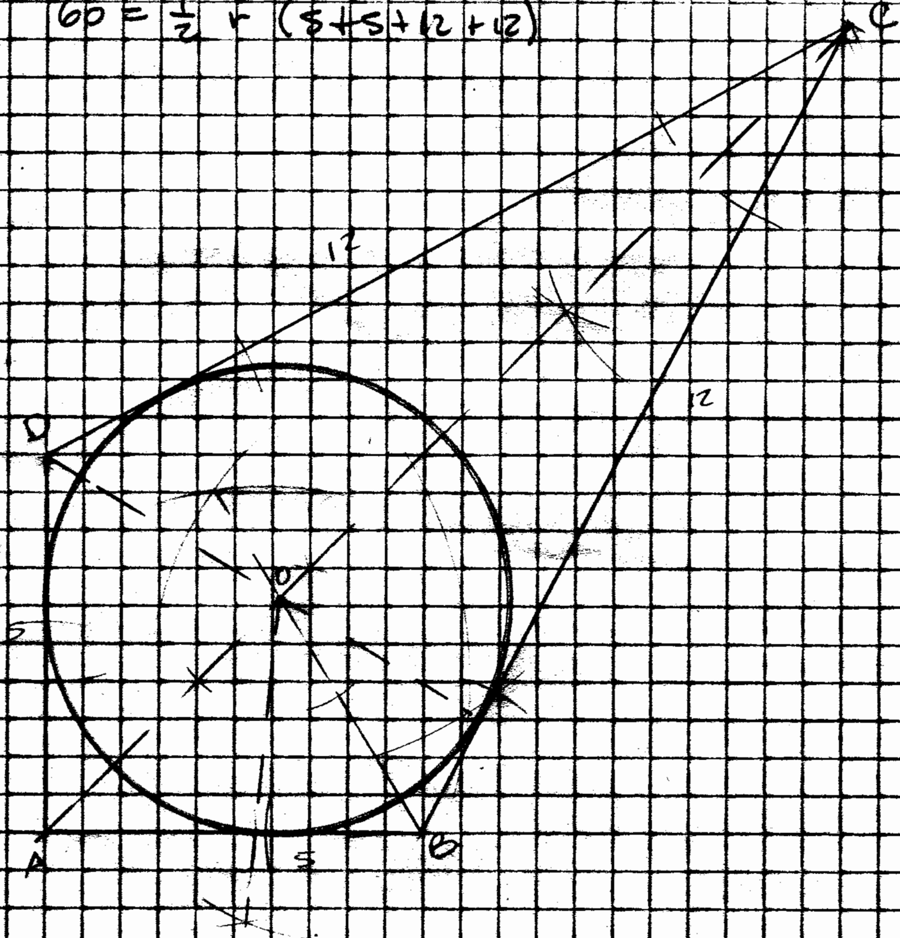
Hallar lo mismo para Q (5, 5, 12, 12)

Aplicando el mismo procedimiento anterior,

$K = \sqrt{(5)(5)(12)(12)}$ $\quad$ $K = \sqrt{3600}$ $\quad$ $K = 60$

$60 = \frac{1}{2}\left[5r + 5r + 12r + 12r\right]$

$60 = \frac{1}{2}\, r\,(5+5+12+12)$



$60 = \frac{1}{2}\, r\,(34)$

$r = \frac{(60)\,2}{34}$

$r = \frac{60}{17}$

$r = 3.5294$