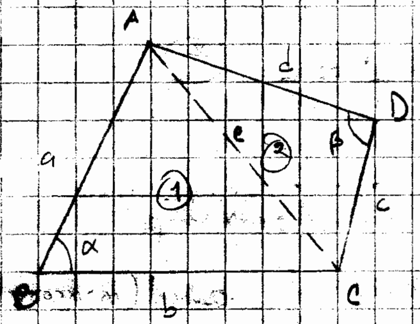
Gilberto Gómez Correa

Teorema de Brahmagupta

1) Area de un cuadrilátero cíclico de lados a, b, c, d y ~~semiperímetro~~ s está dada por:



$$A^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$

$$s = \frac{a+b+c+d}{2}$$

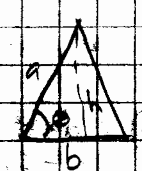
$$2s = a+b+c+d$$

El área del cuadrilátero está dada por la suma de los triángulos con lado común en la diagonal AC.

$$A_{\Delta 1} = \frac{1}{2} b(a \operatorname{sen}\alpha) = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen}\alpha$$

$$A_{\Delta 2} = \frac{1}{2} c(d \operatorname{sen}\beta) = \frac{1}{2} cd \operatorname{sen}\beta$$

por



$$A = \frac{1}{2} bh$$

$$\frac{h}{a} = \operatorname{sen}\theta$$

$$h = a \operatorname{sen}\theta$$

$$A = \frac{1}{2} b(a \operatorname{sen}\theta)$$

$$A = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen}\theta$$

Por tanto tenemos

$$A = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{2} cd \operatorname{sen}\beta$$

$$A = \frac{1}{2}(ab \operatorname{sen}\alpha + cd \operatorname{sen}\beta)$$

$$2A = ab \operatorname{sen}\alpha + cd \operatorname{sen}\beta$$

multiplicando todo por 2

$$4A = 2ab \operatorname{sen}\alpha + 2cd \operatorname{sen}\beta$$

$$(4A)^2 = (2ab \operatorname{sen}\alpha + 2cd \operatorname{sen}\beta)^2$$

$$16A^2 = 4a^2b^2 \operatorname{sen}^2\alpha + 4c^2d^2 \operatorname{sen}^2\beta + 8abcd \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

(3) $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

usando (3)

$$16A^2 = 4a^2b^2(1-\cos^2\alpha) + 4c^2d^2(1-\cos^2\beta) + 8abcd \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$16A^2 = 4a^2b^2 - 4a^2b^2\cos^2\alpha + 4c^2d^2 - 4c^2d^2\cos^2\beta + 8abcd \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$16A^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 4a^2b^2\cos^2\alpha - 4c^2d^2\cos^2\beta + 8abcd \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

Teniendo en cuenta la ley de los cosenos para los triángulos (1) y (2)

$$a^2+b^2 - 2ab\cos\alpha = e^2 \qquad c^2+d^2 - 2cd\cos\beta = e^2$$

① $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)$

obtenemos

$$a^2+b^2-2ab\cos\alpha = c^2+d^2-2cd\cos\beta \quad (*)$$

Continuando...

$$16A^2 = 4a^2b^2+4c^2d^2-4a^2b^2\cos^2\alpha-4c^2d^2\cos^2\beta+8abcd\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

①

$$16A^2 = 4a^2b^2+4c^2d^2+\underbrace{8abcd-8abcd}_{\text{para completar cuadrados}}-4c^2d^2\cos^2\beta-4a^2b^2\cos^2\alpha+8abcd(\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta))$$

$$16A^2 = (2ab+2cd)^2-4a^2b^2\cos^2\alpha-4c^2d^2\cos^2\beta+8abcd\cos\alpha\cos\beta-8abcd\cos(\alpha+\beta)-8abcd$$

$$16A^2 = (2ab+2cd)^2-4a^2b^2\cos^2\alpha-4c^2d^2\cos^2\beta+8abcd\cos\alpha\cos\beta-8abcd(1+\cos(\alpha+\beta))$$

$$16A^2 = (2ab+2cd)^2-(4a^2b^2\cos^2\alpha+4c^2d^2\cos^2\beta-8abcd\cos\alpha\cos\beta)-8abcd(1+\cos(\alpha+\beta))$$

Usando $(*)$ $\quad a^2+b^2-2ab\cos\alpha = c^2+d^2-2cd\cos\beta$

$$-2ab\cos\alpha+2cd\cos\beta = -a^2-b^2+c^2+d^2$$

$$-(i^2+j^2-2ji) = -(j-i) = -(-j+i) \quad ②$$

$$-(4a^2b^2\cos^2\alpha+4c^2d^2\cos^2\beta-8abcd\cos\alpha\cos\beta) = -(-2ab\cos\alpha+2cd\cos\beta)^2$$

por ② $\quad = -(2ab\cos\alpha-2cd\cos\beta)^2$

por ③ $\quad = -(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$

$$2ab\cos\alpha-2cd\cos\beta = a^2+b^2-c^2-d^2 \quad ③$$

Continuando...

$$16A^2 = (2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2-8abcd(1+\cos(\alpha+\beta))$$

$$w^2-x^2 = (w+x)(w-x) \quad ④$$

④ $16A^2 = (2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)(2ab+2cd-(a^2+b^2-c^2-d^2))-8abcd(1+\cos(\alpha+\beta))$

$16A^2 = (a^2+2ab+b^2-c^2+2cd-d^2)(c^2+2cd+d^2-(a^2+b^2)+2ab)-8abcd(1+\cos(\alpha+\beta))$

$16A^2 = (a^2+2ab+b^2-(c^2-2cd+d^2))(c^2+2cd+d^2-(a^2-2ab+b^2))-8abcd(1+\cos(\alpha+\beta))$

④ $16A^2 = ((a+b)^2-(c-d)^2)((c+d)^2-(a-b)^2)-8abcd(1+\cos(\alpha+\beta))$

$16A^2 = [a+b+c-d][a+b-c+d][c+d+a-b][c+d-a+b]-8abcd(1+\cos(\alpha+\beta))$

Usando $\rightarrow \begin{cases} 2s = a+b+c+d \\ 2s-2a = -a+b+c+d \end{cases}$ $\quad 2s-2b = a-b+c+d$, $\quad 2s-2c = a+b-c+d$, $\quad 2s-2d = a+b+c-d$

$$16A^2 = [2s-2d][2s-2c][2s-2b][2s-2a]-8abcd(1+\cos(\alpha+\beta))$$

$$16A^2 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\,(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-8abcd(1+\cos(\alpha+\beta))$$

$$16A^2 = 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-8abcd(1+\cos(\alpha+\beta))$$

$$16A^2 = 16\left[(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-\tfrac{1}{2}abcd(1+\cos(\alpha+\beta))\right]$$

$$A^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-\tfrac{1}{2}abcd(1+\cos(\alpha+\beta))$$

Gilberto Gómez Correa

$$A^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - \frac{1}{2}abcd\,(1+\cos(\alpha+\beta))$$

Dado que el cuadrilátero es cíclico, $\alpha+\beta = 180°$ (los ∡'s opuestos son suplementarios), luego $1+\cos(\alpha+\beta) =$
$1+\cos(180°) =$
$1+(-1) = 0$, con lo que se demuestra el teorema

$$A^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - \frac{1}{2}abcd\,(1+\cos(\alpha+\beta))$$
$$A^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - \frac{1}{2}abcd\,(0)$$
$$A^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$

$$\boxed{A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$$

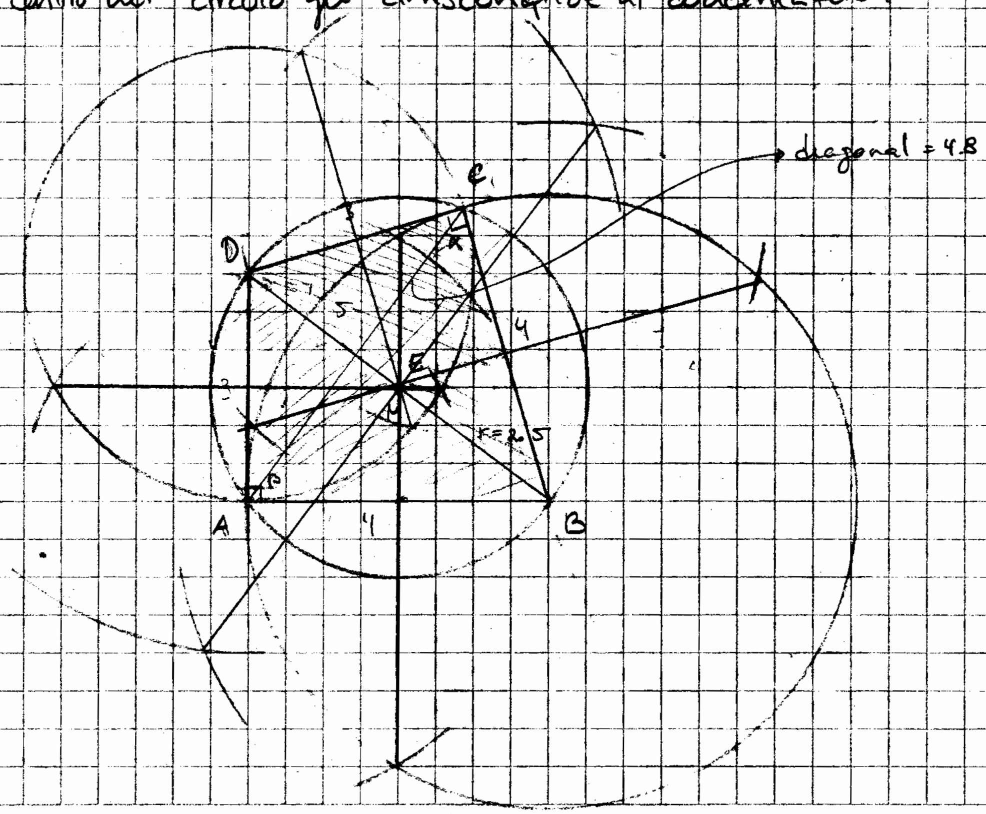
Teorema de Brahmagupta

2) ¿Qué hay detrás del teorema de Ptolomeo?

Hay una relación estricta entre las diagonales de un cuadrilátero y la suma del producto de sus lados opuestos.

3) Encontrar el centro del círculo que circunscribe al cuadrilátero.

a)



★ Para trazar los cuadriláteros se trazaran 2 circulos con radio = a los catetos del 1er triángulo y el punto de intersección de las circunferencias es el vertice que faltaba del cuadrilátero.

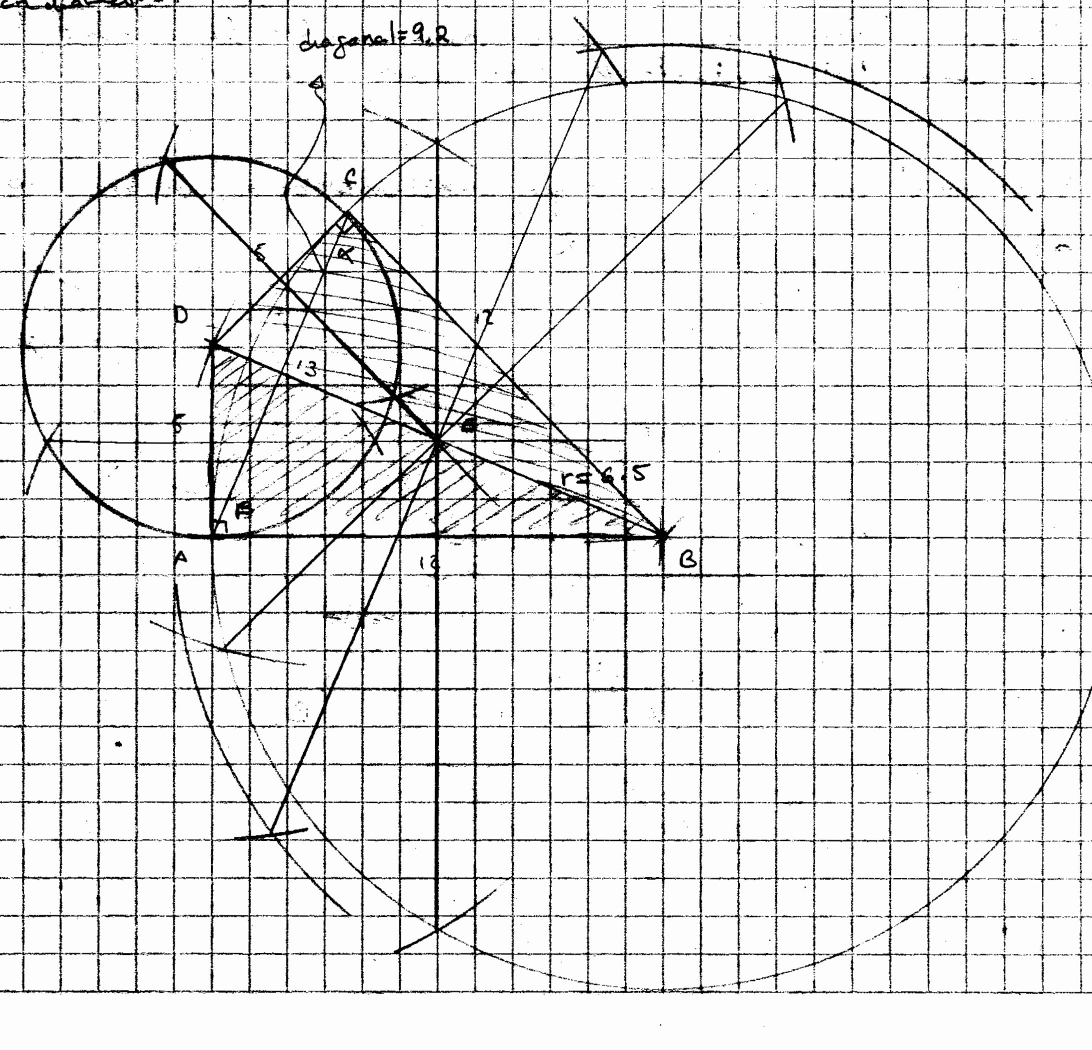
(ABCD) Δ(ABD) y Δ(BCD)

- Se traza un cuadrilátero formado por 2 triángulos congruentes de lados 3, 4, 5, de modo que sean rectángulos y comparten la hipotenusa, además que sus lados contiguos son iguales y los opuestos diferentes.
- Dado que la suma de los ángulos opuestos del cuadrilátero es 180°. ($\alpha+\beta=180°$) el cuadrilátero es ciclico. Y el teorema de Ptolomeo (caso especial) arroja un resultado creible y comprobado directamente (medido), de la otra diagonal

$$BD \cdot CA = AB \cdot CD + CB \cdot DA$$
$$5x = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4$$
$$x = 24/5$$
$$x = 4.8$$

- Luego se bisecan los lados del cuadrilátero y se trazan las mediatrices para encontrar el centro del circulo que circunscribe al cuadrilátero.
- Resulta que el centro está sobre la hipotenusa compartida, por lo tanto la hipotenusa es un Diametro.
- Al trazar la mediatriz de la hipotenusa se verifica que E es el centro y el radio = 2.5 por ser E punto medio de la hipotenusa que es el diametro.

b)



Gilberto Gómez Correa.

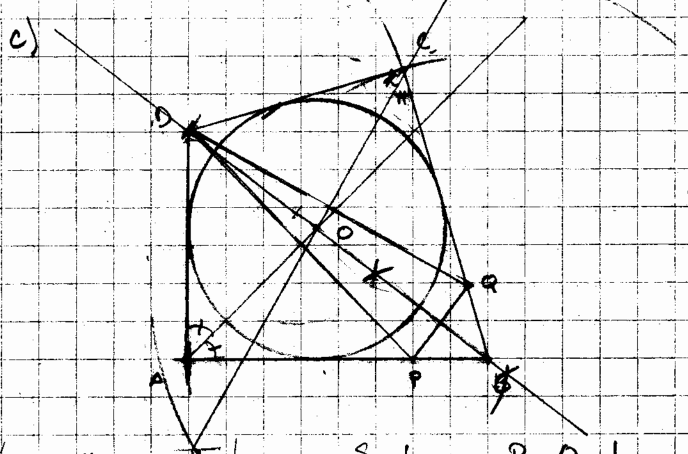
- Se traza un cuadrilátero (ABCD) formado por 2 triángulos (Δ(ABD), Δ(BCD)) congruentes de lados 5, 12 y 13, de modo que sean rectángulos y que compartan la hipotenusa, además sus lados contiguos deben ser iguales y los opuestos diferentes.
- Dado que la suma de los ángulos opuestos del cuadrilátero es 180° ($\alpha + \beta = 180°$) el cuadrilátero es cíclico, y el teorema de Ptolomeo (caso especial) nos da el resultado del valor de la otra diagonal.

$$BD \cdot CA = AB \cdot CD + CB \cdot DA$$
$$13x = 12 \cdot 5 + 12 \cdot 5$$
$$x = 120/13$$
$$x = 9.2$$

- Posteriormente se bisectan los lados del cuadrilátero y se trazan las mediatrices para encontrar el centro del círculo circunscribe al cuadrilátero.
- Resulta que el centro está sobre la hipotenusa compartida, por lo tanto la hipotenusa es un Diámetro
∴ Al trazar la mediatriz de la hipotenusa se verifica que E es el centro y el radio = 6.5 por ser E punto medio de la hipotenusa que es un diámetro.

Encontrar el centro del círculo inscrito

c)

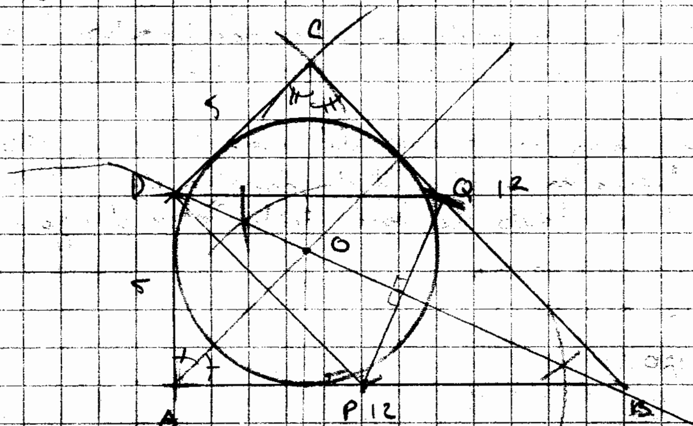


El cuadrilátero ABCD es circunscrito (sus lados son tangentes a una misma circunferencia) sí y sólo si
AB + CD = BC + DA
(La suma de sus lados opuestos son iguales)
4 + 3 = 4 + 3
12 = 12 (Es el mismo que en a))

{ AB = 4, BC = 4, AD = 3, CD = 3 }

Se trazan P y Q de modo que AD = AP ∧ CD = CQ, entonces se traza la mediatriz de PQ y esa línea pasa por el centro O del círculo que se quiere inscribir.

ΔBPQ, ΔAPD, ΔQCD son isósceles y Bisectrices: ∡B, ∡A y ∡C son las mediatrices de los lados PQ, PD y QD. Las mediatrices concurren en el circuncentro O del triángulo PQD, luego O es equidistante a los lados del cuadrilátero, por lo que el cuadrilátero admite un círculo inscrito con centro en O d)



El cuadrilátero ABCD (El mismo del inciso b)) es circunscrito (Sus lados son tangentes a una misma circunferencia) si y sólo si:

$$AB + CD = BC + AD$$

(La suma de sus lados opuestos son iguales)

$$5+12 = 5+12$$
$$17 = 17$$

Se trazan las rectas DP y DQ a modo que $DA = AP$ y $DC = CQ$. A través de QP se traza su mediatriz, la cual va a pasar por O, el centro del círculo inscrito. Luego se trazan las bisectrices de los ángulos $\measuredangle A$, $\measuredangle C$ y $\measuredangle B$ que son también las mediatrices de PQ, DP y QP y confluyen a O. Los Δ's ADP, BBQ y DQC son isósceles.

↓

Que es el circuncentro del Δ DPQ

Luego O es equidistante de los lados del cuadrilátero y admite un círculo inscrito con centro en O.