UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS.

GEOMETRIA ANALITICA I

"Area del triangulo, cuadrilateros ciclicos y teorema de Ptolomeo"

Resendiz Flores Ivan

Grupo: 4048

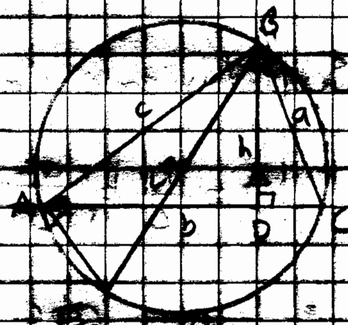
Prof. Pablo Barrera

México DF. a 3 de Octubre del 2005

1) El área de un triángulo en función de sus lados y el radio del su círculo circunscrito.

"El área de un triángulo es igual al producto de sus lados dividido por el cuádruplo del radio de la circunferencia circunscrita" es decir:

$$A = \frac{abc}{4r}$$



Hipótesis:

Sea $\triangle ABC$ de área A y cuyo círculo circunscrito tiene radio r

Tracemos $\overline{BE}$ que es el radio del círculo, que es igual a $2r$

Construyamos $\overline{BD}$ formando un $\perp$ con $\overline{AC}$

$\measuredangle A = \measuredangle D =$ rectos (por construcción)

$\measuredangle E = \measuredangle C$ porque abarcan el mismo arco $\overset{\frown}{AB}$

$\triangle AEB \sim \triangle BDC$ (por el criterio de semejanza AA)

Tesis: $A = \frac{abc}{4r}$

Demostración:

$A = \frac{1}{2} bh$ área de un triángulo

Como $\triangle AEB \sim \triangle BDC$ entonces $\frac{h}{c} = \frac{a}{BE}$

despejando h nos queda $h = \frac{ac}{BE}$

Pero $\overline{BE}$ es el diámetro del círculo por lo que:

$$\overline{BE} = 2r$$

$$\therefore \quad h = \frac{ac}{2r}$$

Sustituyendo esto en $A = \frac{1}{2} bh$ nos queda

$$A = \frac{1}{2} b\left(\frac{ac}{2r}\right)$$ hacemos operaciones.

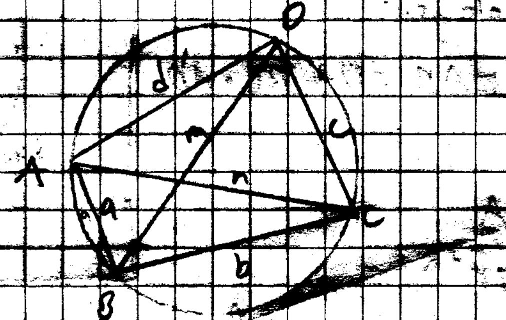
$$\therefore \quad A = \frac{abc}{4r}$$

Queda demostrado

2) Cuadriláteros cíclicos.

Se llama cuadrilátero cíclico al que tiene todos sus vértices sobre una misma circunferencia circunscrita a él.

La siguiente figura muestra un cuadrilátero cíclico en el que según la notación usual A,B,C,D son sus vértices y ángulos; a,b,c,d son sus lados y m,n sus diagonales.



Propiedades:

1) Sus ángulos opuestos suman 180°

2) Cumplen con el teorema de Ptolomeo

$$\boxed{mn = ac + bd}$$

3) Satisfacen la fórmula de Brahmagupta.

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

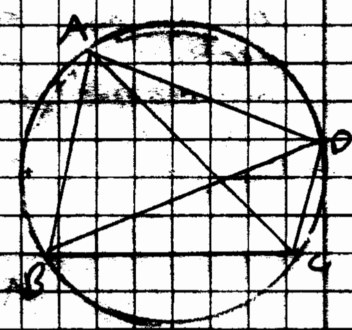
3) Teorema de Ptolomeo

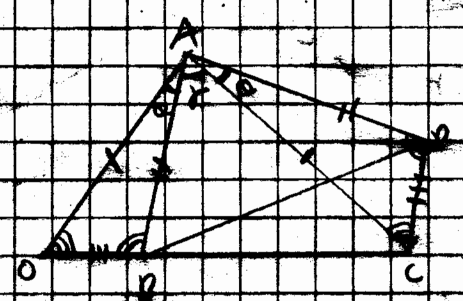
"El producto de las diagonales de un cuadrilatero ciclico es igual a la suma de los productos de sus lados opuestos". Es decir:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

"El cuadrilatero ABCD es ciclico si y solo si:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$





Hipotesis:

Se construye OB tal que $\triangle AOB \sim \triangle ACD$

$\triangle OAC \sim \triangle BAD$ porque $\alpha + \gamma = \gamma + \alpha$ y porque tienen dos lados proporcionales. Usando el criterio de semejanza LAL.

Tesis: $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$

Demostración:

Como $\Delta ABD \sim \Delta ACD$ entonces $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{OB}{CD}$

despejamos OB y nos queda $\boxed{OB = \dfrac{AB \cdot CD}{AD}}$

Como también $\Delta OAC \sim \Delta BAD$ entonces $\dfrac{OC}{BD} = \dfrac{AC}{AD}$

despejamos OC y nos queda $\boxed{OC = \dfrac{AC \cdot BD}{AD}}$

Ahora supongamos que el $\square ABCD$ es cíclico entonces $OC = OB + BC$ porque son colineales.

Sustituyendo OC y OB en $OC = OB + BC$ nos queda

$$\frac{AC \cdot BD}{AD} = \frac{AB \cdot CD}{AD} + BC$$ y despejamos $AC \cdot BD$

$$AC \cdot BD = AD\left(\frac{AB \cdot CD}{AD} + BC\right)$$

$$\boxed{AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD}$$

Queda demostrado

Pero supongamos que $\square ABCD$ no es cíclico entonces $OC < OB + BC$

Sustituyendo OC y OB en $OC < OB + BC$ nos queda:

$$\frac{AC \cdot BD}{AD} < \frac{AB \cdot CD}{AD} + BC$$ despejamos $AC \cdot BD$

$$AC \cdot BD < AD\left(\frac{AB \cdot CD}{AD} + BC\right)$$

$$AC \cdot BD < AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

Llegamos a una desigualdad por lo tanto el $\square ABCD$ no es cíclico.