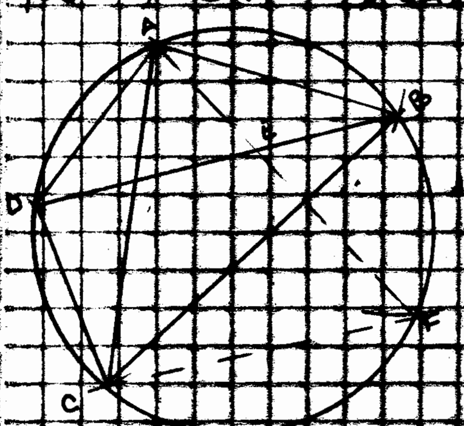
Cruz Sosa Francisco

Teorema de Ptolomeo

El enunciado nos marca que En un cuadrilátero inscrito en una circunferencia el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos.

$$AB \cdot DC + DA \cdot CB = AC \cdot BD$$

Sea el cuadrilátero $ABCD$ tracemos el segmento AE de manera que $\measuredangle BAE = \measuredangle CAD$



Entonces los triángulos ABE y ACD son semejantes y

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{DC} \Rightarrow AB \cdot DC = AC \cdot BE \quad (1)$$

También son semejantes los triángulos ADE y ACB:

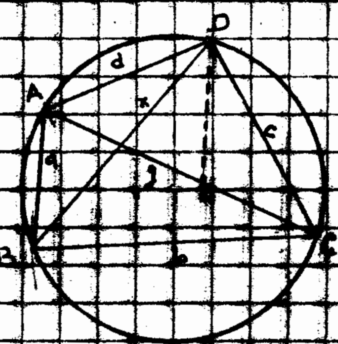
$$\frac{AD}{AC} = \frac{ED}{CB} \Rightarrow DA \cdot CB = AC \cdot ED \quad (2)$$

Sumando (1) y (2) obtenemos

$$AB \cdot DC + DA \cdot CB = AC\,(BE + ED) = AC \cdot BD$$

Otra demostración de Teorema de Ptolomeo es la siguiente; donde se enuncia el mismo principio.

Designaremos: $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$ y $x = BD$, $y = AC$



Supongamos que los puntos A, B, C y D están en una circunferencia. Se construye $\widehat{CDE} = \widehat{ADB}$, con $E \in AC$. Entonces los triángulos CDE y BCD son semejantes, de donde $\frac{a}{EC} = \frac{x}{c}$

Pero también ADE y BCD son semejantes así que $\frac{b}{AE} = \frac{x}{d}$

Como $AE + EC = AC = y$, sustituyendo tenemos

$$\frac{bd}{x} + \frac{ac}{x} = y \iff ac + bd = xy.$$

Recíprocamente, probaremos que si $ac + bd = xy$, entonces el cuadrilátero ABCD es cíclico. Se construye $\widehat{CDE} = \widehat{ADB}$ y se determina DE tal que $\frac{x}{c} = \frac{d}{DE}$ se une el punto E con A y con C. Entonces los triángulos EDC y ADB son semejantes, por que tienen lados proporcionales que comprenden ángulos iguales, y BDC es semejante a ADE.

Entonces

$$\frac{a}{EC} = \frac{x}{c} \Rightarrow \widehat{CED} = A$$

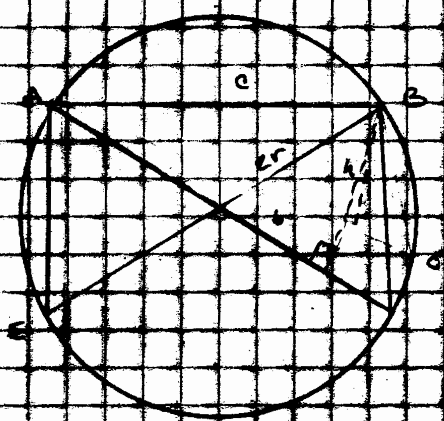
$$\frac{b}{AE} = \frac{x}{d} \Rightarrow \widehat{DEA} = C$$

Sumando $(AE + EC)x = ac + bd$, $\widehat{CED} + \widehat{DEA} = A + C$

Como $xy = ac + bd$, $xy = (AE + EC)x \Rightarrow y = AC = AE + EC$, lo cual indica que AEC es una línea recta, lo que implica

$A + C = \widehat{CED} + \widehat{DEA} = 180°$ y el cuadrilátero es cíclico

Si tenemos una cuanferencia y en ella esta inscrito un triángulo; que sus vertices estan en la circonferencia, como se muestra.



El Area es igual al Producto de sus lados divididos por el cuadruple del radio de la circunferencia

$$A = \frac{abc}{4r}$$

Sea ΔABC de Area Δ y cuyo radio r

$\overline{BE} = 2r$ es el diametro

$\overline{BD} = h$ de $\Delta\ DCB$

$\measuredangle A = \measuredangle D =$ rectos (por construcción)

$\measuredangle E = \measuredangle C$

$$\Delta AEB \sim \Delta BDC$$

y así $A = \dfrac{abc}{4r}$

$\Delta = \frac{1}{2} bh$ es el Area de un triángulo; por lo tanto

$\Delta AEB \sim \Delta BDC$ son semejantes y $\dfrac{h}{c} = \dfrac{a}{\overline{BE}}$

$h = \dfrac{ac}{\overline{BE}}$ despejando h