Cruz Sosa Francisco

La formula de Herón de Alejandría viene recogida y demostrada en su libro *La Métrica*. Actualmente se cree que Arquímedes también conocía la fórmula, aunque es posible que fuese conocida anteriormente.

En geometría la formula de Herón plantea que la superficie de un triángulo de lados a, b, c viene dada por

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

donde p es el semiperímetro

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

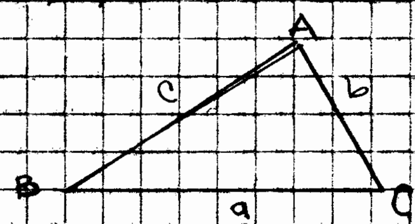
ó también la formula puede ser descrita como

$$S = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}{4}$$

Demostración: Una demostración moderna, que emplea Algebra y trigonometría (distinta a la que Herón dijo en su libro).

Supongamos un triángulo de lados a, b, c cuyos ángulos opuestos a cada uno de esos lados son A, B, C. Y Tenemos que:

$$\cos(C) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$



Por el teorema del coseno

$$\operatorname{sen}(C) = \sqrt{1-\cos^2(C)} = \frac{\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}}{2ab}$$

la altura de un triángulo de base a tiene una longitud $b\operatorname{sen}(C)$;

$$S = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura})$$

$$= \frac{1}{2} a b \operatorname{sen}(C)$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

La Formula de Herón es un caso particular de la formola de Brahmagupta para el cálculo de la superficie de cuadriláteros inscritos en una circunferencia y ambas son casos particulares de la forma de Bretschneider para calcular la superficie de un cuadrilátero.

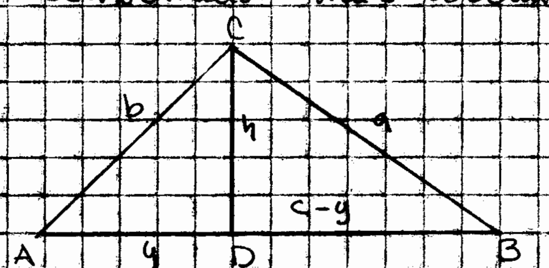
Expresando la formola de Herón de forma matricial dentro de un determinante en terminos de cuadrados de distancias de los vértices dados;

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}$$

que es muy parecida a la fórmula de Tartaglia para el cálculo de un volumen de tetraedro

Esta explicación la obtuve de Internet, ya que fue la que mas me favoreció y agradó y la pag. es: http://es.wikipedia.org

Ahora una demostración mas a detalle.



Podemos expresar h en términos de a, b y c:

$$c = y + c - y = \sqrt{a^2 - h^2} + \sqrt{b^2 - h^2}$$

donde:

$$h^2 = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4c^2}$$

$$= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4c^2}$$

y entonces, siendo $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

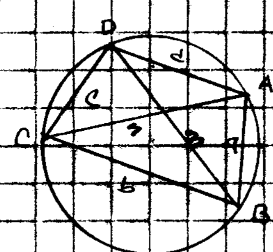
$$K^2 = \frac{c^2h^2}{4} = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{16}$$

$$= s(s-a)(s-b)(s-c)$$

Estas son algunas de las Fórmulas de cuadrilateros las cuales pude recopilar por medio de Internet.

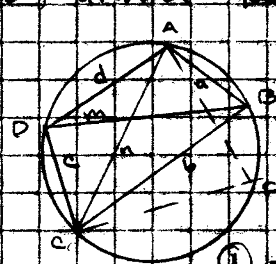
En sí hay muchas aproximaciones para hacer una formula generalizada para los cuadrilateros, pero por su complejidad ha sido un poco fatigoso, pues un cuadrilatero se forma por 4 lados no importando su misma distancia de lados y sin importar si es rectángulo ó no, Es por eso que a cada caso hay una formula que pudiera ser aplicado en otro cuadrilatero similar. Algunas de las formulas que a continuación se explicaran son como el Teorema de Ptolomeo, Brahmagupta y Bretschneider y la formula de Herón pero demostrada anteriormente.

Entre lo que encontre fue a los cuadrilateros cíclicos que son los que tienen todos sus vertices sobre una circunferencia.



Una propiedad de estos cuadrilateros cíclicos es que sus $\measuredangle$ opuestos suman 180, así A y C abarcan juntos toda la circunferencia y por ello suman media circunferencia.

Teorema de Ptolomeo, afirma que, (utilizando la figura anterior) $mn = ac + bd$.



Si se traza AE de manera que $\measuredangle BAE = \measuredangle CAD$ Entonces, los triángulos ABE y ACD son semejantes $\Rightarrow$

(1) $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BE}{DC} \Rightarrow AB \cdot DC = AC \cdot BE \Rightarrow$

$$ac = n \cdot BE$$

Y tambien son semejantes los triangulos ADE y ACB:

(2) $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{ED}{CB} \Rightarrow DA \cdot CB = AC \cdot ED \Rightarrow db = n \cdot ED$

Y haciendo su suma (1) y (2) $\therefore$

$$ac + bd = (BE + ED) \cdot n = mn$$

Estas demostraciones nos ayudan a obtener las areas de cuadrilateros los cuales no cuentan con una formula general.

Otra Formula para calcular Areas es la formula de Brahmagupta

que Brahmagupta para hallar el área k de un cuadrilatero cíclico con lados a, b, c, d y semiperimetro s

$$K = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

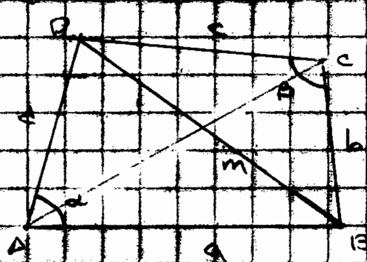
la Formula de Brahmagupta es caso particular de

$$K \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\frac{A+C}{2}}$$

que no tiene que ser cíclico, cuando el cuadrilatero es ciclico al ser suplementarios los ángulos opuestos, el coseno se anula y se obtiene así a la F. de Brahmagupta y si hacemos coincidir los vertices ejemplo C=D, la formula de Brahmagupta se reduce a

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Para su demostración de la f. de Brahmagupta. Consideramos un cuadrilátero cualquiera ABCD.



El Area k es la suma de los triángulos ABD y CBD

$$k^2 = ((ABD)+(CBD))^2 = \frac{1}{4}(ab\,\text{sen}\,\alpha + cd\,\text{sen}\,\beta)^2$$

$$= \frac{1}{4}(a^2b^2\,\text{sen}^2\alpha + c^2d^2\,\text{sen}\,\beta + 2abcd\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta)$$

Aplicando el Teorema del coseno a los Triangulos ABD y CBD

$$m^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

$$m^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta$$

y restando ambas ⇒

$$2ab\cos\alpha - 2cd\cos\beta = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$$

elevando al cuadrado, y dividiendo ÷16

$$\frac{1}{4}(a^2b^2\cos^2\alpha + c^2d^2\cos^2\beta - 2abcd\cos\alpha\cos\beta) = \frac{1}{16}(a^2+b^2-c^2-d^2)$$

Teniendo en cuenta la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, y de esto el primer miembro se suma y el segundo lo restamos por el segundo miembro de la igualdad

$$K^2 = ((ABD) + (CBD))^2 = \frac{1}{4}(ab\operatorname{sen}\alpha + cd\operatorname{sen}\beta)^2 =$$

$$\frac{1}{4}(a^2b^2\operatorname{sen}^2\alpha + c^2d^2\operatorname{sen}^2\beta + 2abcd\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)$$

Aplicando :.

$$K^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcd(\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta - \cos\alpha\cos\beta)) -$$

$$\frac{1}{16}(a^2+b^2-c^2-d^2) = \frac{4a^2b^2 + 4c^2d^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{16} - \frac{abcd\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$= \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2 - a^4 - b^4 - c^4 - d^4}{16}$$

$$- \frac{abcd\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$K^2 = \frac{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{16}$$

$$- \frac{abcd}{2} - \frac{abcd\cos(\alpha+\beta)}{2} =$$

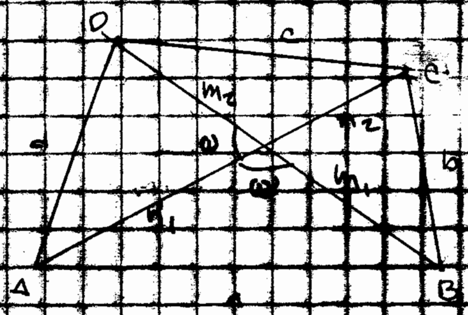
$$= (s-a)(s-b)(s-c)(s-c) - abcd\,\frac{1+\cos(\alpha+\beta)}{2} =$$

$$= (s-a)(s-b)(s-c)(s-c) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

otra formula que se menciona fue de Bretschneider

Tenemos que:

$$16K^2 = 4m^2n^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2$$



Sean m_1, m_2, n_1, n_2 diagonales con m_1, n_1 adyacentes a (a). Sea ω ∡ entre m_1, n_1 y sea ω' su suplementario

Pero:

$$2mn\cos\omega = 2(m_1+m_2)(n_1+n_2)\cos\omega =$$

$$= 2m_1n_1\cos\omega - 2m_1n_2\cos\omega' - 2m_2n_1\cos\omega' + 2m_2n_2\cos\omega =$$

$$-a^2 + b^2 - c^2 + d^2$$

y aplicando el Teo. del coseno a cada sumando se obtiene