PREFACIO

Los conceptos de la derivada y de la integral, fundamentales en el Análisis Matemático, no son elementales: en cualquier curso consecuente de Análisis Matemático les preceden las teorías de los números reales, de los límites y de las funciones continuas. Esta exposición previa es indispensable si se quiere enunciar dichos conceptos de forma suficientemente universal con el fin de aplicarlos a clases de funciones lo más amplio posibles. Sin embargo, limitándose a la clase relativamente estrecha de las funciones racionales y recurriendo al lenguaje de la representación gráfica, es posible explicar estos conceptos en pocas páginas de una manera precisa y, a la vez, enjundiosa. Éste es el objetivo de nuestro folleto destinado a un amplio sector de lectores; los conocimientos de un escolar de los dos últimos grados bastan para comprender todo cuanto aquí se trata.

§ 1. GRÁFICOS

Aun suponiendo que el lector está familiarizado con la representación gráfica, recordaremos los momentos esenciales.

Tracemos en el plano dos rectas perpendiculares, una horizontal y otra vertical, indicando por O el punto de intersección. La recta horizontal se denomina *eje de las abscisas* y la vertical lleva el nombre de *eje de las ordenadas*. El punto O divide cada uno de los ejes en dos semiejes, uno positivo y otro negativo: el semieje de la derecha del eje de las abscisas y el semieje de arriba del eje de las ordenadas se consideran positivos, mientras que el semieje de la izquierda del eje de las abscisas y el semieje de abajo del eje de las ordenadas se consideran negativos; marquemos con flechas los semiejes positivos. La posición de cualquier punto M del plano se puede entonces determinar mediante un par de números. Para ello bajemos desde M las perpendiculares a cada uno de los ejes obteniendo así dos segmentos: OA y OB (fig. 1). La longitud del segmento OA, tomada con el signo «+» si A se halla en el semieje positivo y con el signo «—» si A se encuentra en el semieje negativo, se denomina *abscisa* del punto M y se designa por x. Análogamente, la longitud del segmento OB (aplicando la misma regla para determinar su signo) se denomina *ordenada* del punto M y se representa por y. Los números x e y son las *coordenadas* del punto M. Todo punto del plano tiene coordenadas; además, la ordenada de cualquier punto del eje de las abscisas y la abscisa de cualquier punto del eje de las ordenadas son iguales a cero; ambas coordenadas del origen de coordenadas O (punto de intersección de los ejes) son iguales a cero. Recíprocamente a partir de dos números arbitrarios x e y de signos cualesquiera se

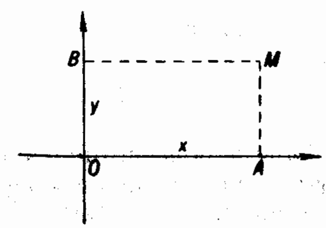

FIG. 1

puede construir un punto M (que—momento muy importante—es único) cuya abscisa es x y cuya ordenada es y; para ello bastará tomar en el eje de las abscisas el segmento $OA = x$ y levantar en A la perpendicular $AM = y$ (teniendo en cuenta la regla de los signos); M será entonces el punto buscado.

Sea dada una regla que indica las operaciones que deben realizarse con la variable independiente (representada por x) obtener el valor de la magnitud que nos interesa (representada por y).

Los matemáticos suelen decir que toda regla de este tipo *define la magnitud y como función de la variable independiente x*. En otras palabras, la *función* es precisamente la *regla* concreta que permite hallar los valores de y a partir de los valores de x.

Por ejemplo, la fórmula

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

muestra que los valores de la magnitud y se obtienen elevando al cuadrado la variable independiente x, agregando uno y dividiendo después el uno por el resultado obtenido. Si x toma un valor numérico x_0, también y tomará, según esta fórmula, un valor numérico y_0. Los números x_0 e y_0 determinan en el plano un punto M_0. En lugar de x_0 se puede tomar otro número x_1 y calcular, empleando la fórmula, el valor nuevo y_1; el par de números x_1, y_1 determina en el plano un punto nuevo M_1. El lugar geométrico de todos los puntos del plano, cuyas ordenadas están ligadas a las abscisas según la fórmula dada, se denomina *gráfico* de la función correspondiente.

Hablando en términos generales, el conjunto de los puntos del gráfico es infinito y, por eso, no podemos aspirar a construir todos esos puntos, sin excepción alguna, a partir de la regla dada. Pero podemos pasarnos sin ello ya que en la mayoría de los casos basta con unos cuantos puntos para juzgar de la forma general del gráfico.

La construcción del gráfico «por el método de puntos» consiste en marcar ciertos puntos del gráfico y en unirlos mediante una línea suave.

A título de ejemplo, consideremos el gráfico de la función

$$y = \frac{1}{1+x^2}. \qquad (1)$$

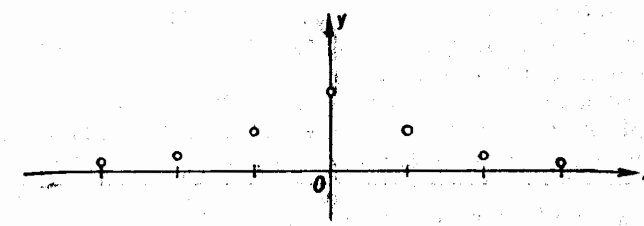

FIG. 2

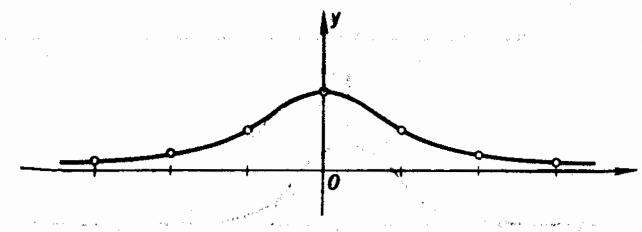

FIG. 3

Compongamos la tabla siguiente:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

En la primera fila aparecen los valores de $x = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$. Como regla general, conviene tomar para los cálculos valores enteros de x. En la segunda fila aparecen los valores correspondientes de y hallados mediante la fórmula (1). Marquemos en el plano los puntos correspondientes (fig. 2). Trazando por ellos una línea suave, obtenemos el gráfico (fig. 3).

Como vemos, la construcción «por el método de puntos» es muy sencilla y no requiere «ciencia» alguna. Sin embargo, posiblemente por esta misma razón, la aplicación ciega del método de construcción «por puntos» puede conducir a errores grandes.

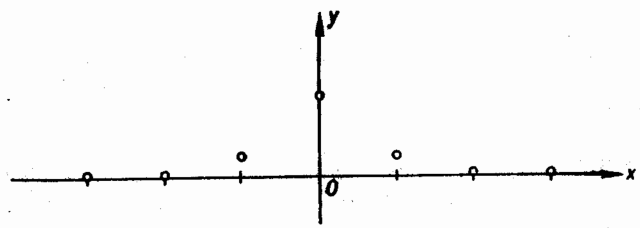

FIG. 4

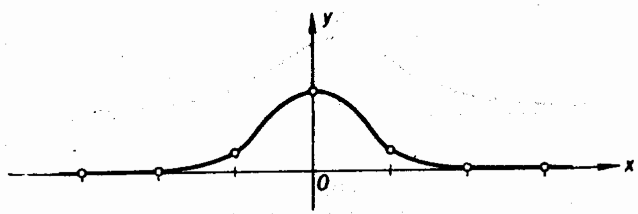

FIG. 5

Construyamos «por el método de puntos» la curva correspondiente a la ecuación

$$y=\frac{1}{(3x^2-1)^2}\cdot \qquad (2)$$

Tenemos la siguiente tabla de los valores de x e y correspondientes a esta ecuación:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{121}$	$\frac{1}{676}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{121}$	$\frac{1}{676}$

Los puntos correspondientes del plano se indican en la fig. 4 muy parecida a la que acabamos de considerar. Uniendo los puntos marcados con una curva suave, obtenemos el gráfico (fig. 5). Al parecer, podemos estar satisfechos y soltar el lápiz: ¡hemos llegado a dominar el arte de la construcción de gráficos! Sin embargo, como una especie de control, calculemos y para un valor intermedio de x, digamos,

para $x=0,5$. Obtenemos un resultado inesperado: $y=16$ que no corresponde absolutamente al gráfico. Y no estamos a salvo de que al calcular y para otros valores intermedios de x —infinitos, sea dicho de paso— no surjan incongruencias aún mayores. Lamentablemente, la construcción de los gráficos «por el método de puntos» no resulta lo suficientemente segura.

Veamos otro método de construcción de gráficos de mayor seguridad pues permite prevenirse contra situaciones inesperadas semejantes a la que acabamos de ver. Empleando este

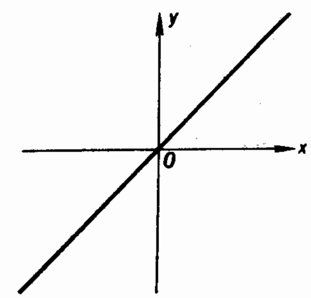

FIG. 6

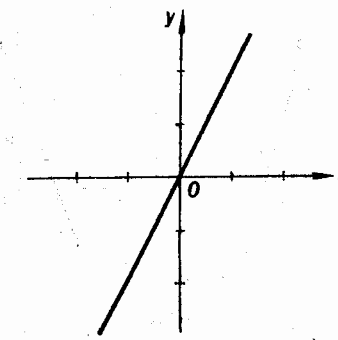

FIG. 7

método, lograremos más adelante construir el gráfico correcto correspondiente a la ecuación (2). Según este método —llamémoslo, por ejemplo, «método de operaciones»—, todas las operaciones (adición, sustracción, multiplicación, división, etc.) que comprende la fórmula dada se realizan directamente en los gráficos.

Comencemos con ejemplos elementales. Construyamos el gráfico correspondiente a la ecuación

$$y=x. \qquad (3)$$

Esta ecuación significa que son iguales las abscisas y las ordenadas de todos los puntos del gráfico buscado. El lugar geométrico de los puntos, cuyas ordenadas son iguales a sus abscisas, es la bisectriz del ángulo que forman los semiejes positivos y del ángulo que forman los semiejes negativos (fig. 6).

El gráfico correspondiente a la ecuación

$$y=kx,$$

donde k es un coeficiente determinado, se obtiene del anterior multiplicando todas las ordenadas por un mismo número k. Sea, por ejemplo, $k=2$; deberemos entonces duplicar cada ordenada del gráfico anterior obteniendo así una recta de mayor pendiente (fig. 7): a cada paso hacia la derecha según el eje x corresponderá un desplazamiento de dos pasos hacia arriba según el eje y. Basándose en esto es fácil realizar la

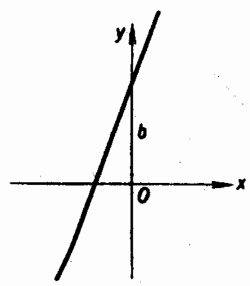

FIG. 8

construcción empleando papel cuadriculado. En el caso general de la ecuación $y=kx$ con un coeficiente k cualquiera también se obtiene una recta. Si $k>0$, a cada paso hacia la derecha corresponderá en esta recta un desplazamiento de k pasos hacia arriba según el eje y. Si $k<0$, el desplazamiento será hacia abajo.

Consideremos ahora la fórmula

$$y=kx+b. \qquad (4)$$

Para obtener su gráfico, debemos agregar a cada ordenada de la línea $y=kx$, que ya conocemos, un mismo número b; de esta forma la recta $y=kx$ se desplazará como un todo en el plano en b unidades hacia arriba si $b>0$ (si $b<0$, la recta inicial descenderá en lugar de elevarse). Como resultado obtendremos una recta paralela a la inicial; ella no pasará ya por el origen de coordenadas y cortará en el eje de ordenadas el segmento b (fig. 8).

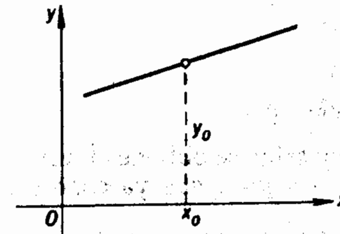

FIG. 9

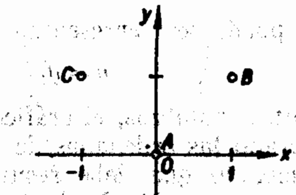

FIG. 10

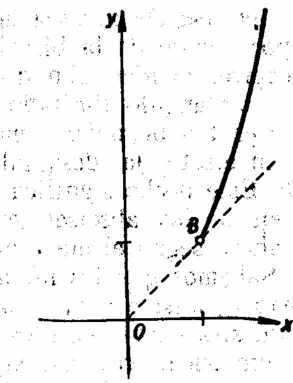

FIG. 11

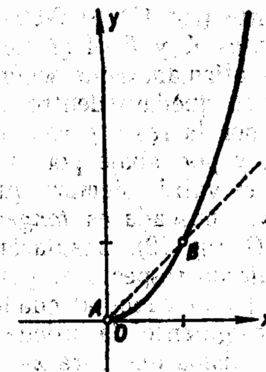

FIG. 12

El número k se llama *coeficiente angular* de la recta $y=kx+b$; como hemos señalado, el número k indica cuántos pasos hacia arriba corresponden en la recta a cada paso hacia la derecha. En otras palabras, k es la tangente del ángulo entre la dirección del eje x y la recta $y=kx+b$.

El gráfico de la ecuación

$$y=k(x-x_0)+y_0 \qquad (4')$$

es la recta de coeficiente angular k que pasa por el punto (x_0, y_0) (fig. 9) ya que tomando $x=x_0$, obtenemos $y=y_0$.

Por lo tanto, el gráfico de cualquier polinomio de primer grado en x es una recta que se traza según las reglas explicadas.

Pasemos a los gráficos de los polinomios de segundo grado.

Consideremos la fórmula

$$y=x^2, \qquad (5)$$

que puede ser representada así

$$y=y_1^2, \quad \text{donde} \quad y_1=x.$$

En otras palabras, el gráfico requerido se obtiene elevando al cuadrado las ordenadas de la línea $y=x$ que ya conocemos. Veamos lo que debe resultar.

Puesto que $0^2=0$, $1^2=1$ y $(-1)^2=1$, obtenemos tres puntos básicos A, B y C (fig. 10). Si $x>1$, se tiene $x^2>x$; por eso, a la derecha del punto B el gráfico irá por encima de la bisectriz del cuadrante (fig. 11). Si $0<x<1$, se tiene $0<x^2<x$, o sea, entre los puntos A y B el gráfico irá por debajo de la bisectriz. Es más, afirmamos que, según vaya aproximándose al punto A, el gráfico quedará dentro de cualquier ángulo limitado por arriba por la recta $y=kx$, donde k es tan pequeño como se quiera, y por abajo por el eje x; en efecto, la desigualdad $x^2<kx$ es válida siempre que $x<k$. Este hecho significa que la curva buscada es *tangente* al eje de las abscisas en el punto O (fig. 12). Desplacémonos ahora según el eje x hacia la izquierda respecto al punto O. Sabemos que los números $-a$ y $+a$ elevados al cuadrado dan el mismo resultado a^2. Por consiguiente, la ordenada de nuestra curva para $x=-a$ será la misma que para $x=+a$. Geométricamente esto significa que el gráfico de nuestra curva correspondiente al semiplano de la izquierda se obtiene del gráfico ya construido en el semiplano de la derecha mediante una simetría respecto al eje de las ordenadas. Obtenemos así la curva denominada *parábola* (fig. 13).

Procediendo igual que antes, podemos construir ahora la curva más compleja

$$y=ax^2 \qquad (6)$$

y la curva aún más compleja

$$y=ax^2+b. \qquad (7)$$

La primera se obtiene multiplicando por el número a todas las ordenadas de la parábola (5) que denominaremos *parábola estandard*.

Si $a>1$, obtenemos una curva que, siendo semejante a la anterior, se eleva más bruscamente hacia arriba (fig. 14).

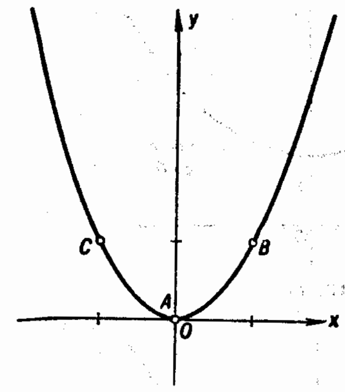

FIG. 13

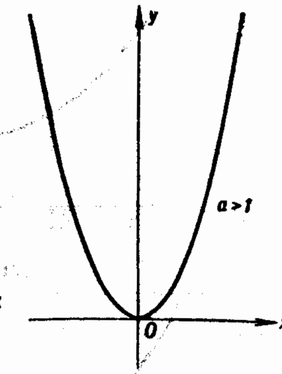

FIG. 14

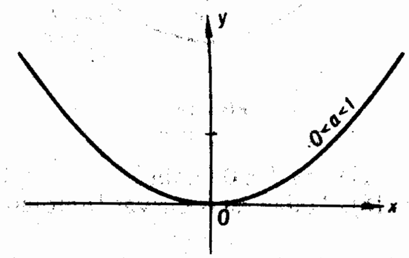

FIG. 15

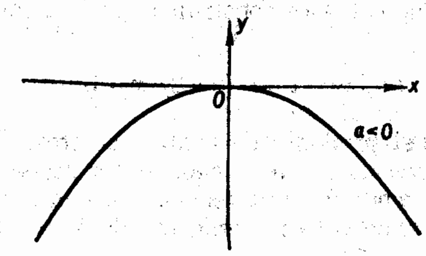

FIG. 16

Si $0<a<1$, la curva será de pendiente más suave (fig. 15); si $a<0$, sus ramas se yolcarán hacia abajo (fig. 16).

Si $b>0$, la curva (7) se obtiene de la curva (6) mediante un desplazamiento hacia arriba determinado por el

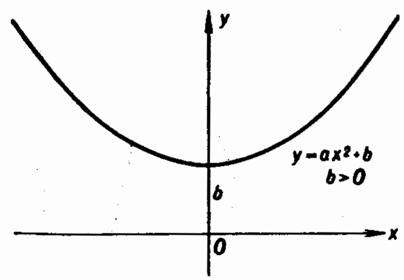

FIG. 17

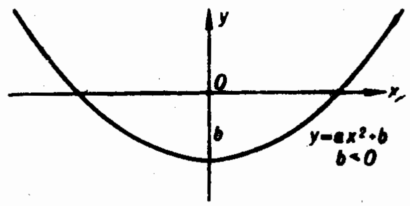

FIG. 18

segmento b (fig. 17). Si $b<0$, habrá que desplazar la curva hacia abajo (fig. 18). Todas estas curvas también se denominan parábolas.

Consideremos un ejemplo más complejo empleando para la construcción del gráfico el método de multiplicación. Supongamos que debemos construir el gráfico correspondiente a la ecuación

$$y=x(x-1)(x-2)(x-3). \tag{8}$$

Aquí tenemos el producto de cuatro factores. Construyamos los gráficos correspondientes a cada factor por separado; todos estos gráficos representarán rectas, paralelas a la bisectriz del cuadrante, que interceptarán en el eje de las ordenadas segmentos de

$$0,\ -1,\ -2 \text{ y } -3$$

respectivamente (fig. 19).

En los puntos 0, 1, 2 y 3 del eje x la ordenada de la curva buscada será 0, ya que el producto es igual a cero si al menos uno de los factores lo es. En los demás lugares el producto

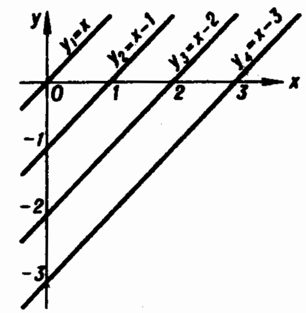

FIG. 19

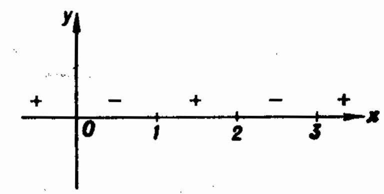

FIG. 20

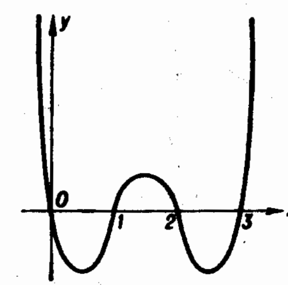

FIG. 21

será diferente de cero y su signo estará determinado por los signos de los factores. Por ejemplo, a la derecha del punto 3 todos los factores son positivos y, por consiguiente, el producto también resulta positivo. Entre los puntos 2 y 3 uno de los factores es negativo y el producto se hace negativo. Entre los puntos 1 y 2 hay dos factores negativos y, por lo tanto, el producto es positivo, etc. Obtenemos la distribución de los signos del producto indicada en la fig. 20. A la derecha del punto 3 todos los factores crecen cuando aumenta x y, por consiguiente, el producto también crece, además muy rápidamente. A la izquierda del punto 0 todos los factores crecen en el sentido negativo y, por eso, el producto (que es positivo) también crece rápidamente.

Ahora es fácil abocetar en líneas generales el gráfico (fig. 21).

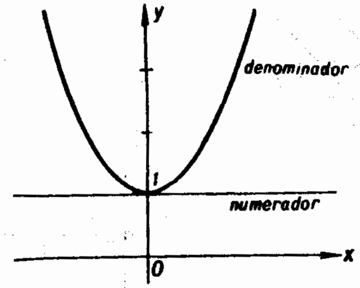

FIG. 22

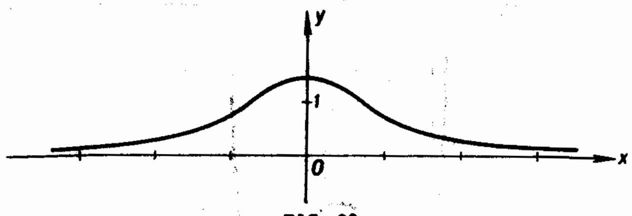

FIG. 23

Hasta aquí hemos considerado las operaciones de adición y multiplicación. Agreguemos ahora a éstas la división. Construyamos la curva

$$y=\frac{1}{1+x^2}. \tag{9}$$

Con este fin construiremos por separado los gráficos del numerador y del denominador.

El gráfico del numerador

$$y_1=1$$

es una recta paralela al eje de las abscisas, a una unidad del eje. El gráfico del denominador

$$y_2=x^2+1$$

se obtiene desplazando en una unidad hacia arriba la parábola estándard. Ambos gráficos están representados en la fig. 22.

Realicemos ahora la división de cada ordenada del numerador por la ordenada correspondiente (o sea, calculada para

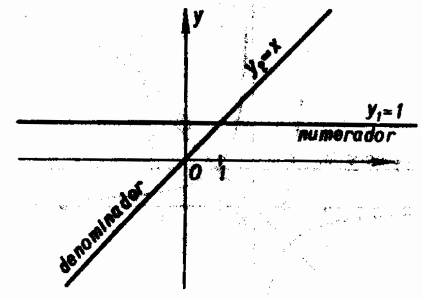

FIG. 24

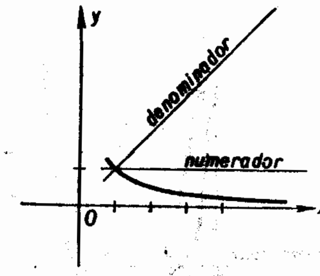

FIG. 25

el mismo valor de x) del denominador. Si $x=0$, tenemos $y_1=y_2=1$ de modo que $y=1$. Si $x\neq 0$, el numerador es menor que el denominador y el cociente es menor que 1. Puesto que el numerador y el denominador son siempre positivos, el cociente también es positivo y, por consiguiente, el gráfico queda situado en la franja comprendida entre el eje de las abscisas y la recta $y=1$. Si x crece infinitamente, el denominador también crece infinitamente, mientras que el numerador permanece constante; por eso, el cociente tiende a cero. Todo esto conduce al siguiente gráfico del cociente (fig. 23); coincide con el gráfico obtenido por el método de puntos (fig. 3).

En la división gráfica desempeñan un papel especial los valores de x que anulan el denominador. Si el numerador es distinto de cero, el cociente se hace infinito. Para comprender el significado de estas palabras, construyamos la curva.

$$y=\frac{1}{x}. \tag{10}$$

Conocemos ya los gráficos del numerador y del denominador (fig. 24). Para $x=1$ tenemos $y_1=y_2=1$, de donde $y=1$. Si $x>1$, el numerador es menor que el denominador y el cociente es menor que 1; cuando x crece infinitamente, el cociente tiende a cero (igual que en el ejemplo anterior); así obtenemos la parte del gráfico correspondiente a los valores $x>1$ (fig. 25).

Consideremos ahora los valores de x comprendidos entre 0 y 1. Si x parte del 1 y se aproxima al cero, el denominador tiende a cero mientras que el numerador permanece igual a 1.

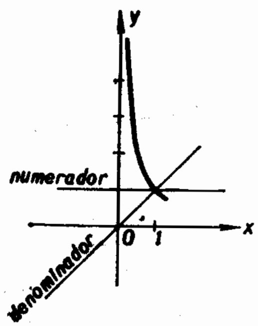

FIG. 26

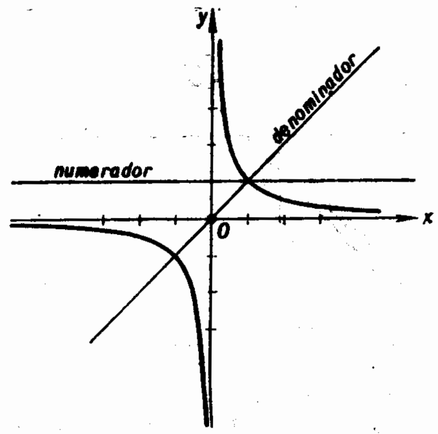

FIG. 27

Por eso, el cociente crece infinitamente sobrepasando, para valores suficientemente pequeños de x, cualquier número por grande que sea; así obtenemos la rama que va al infinito (fig. 26). Para $x<0$ el denominador y, por ende, el cociente son negativos. El aspecto general del gráfico puede verse en la fig. 27.

Ahora podemos realizar debidamente la construcción del gráfico de la curva

$$y=\frac{1}{(3x^2-1)^2} \qquad (11)$$

de la que hemos hablado antes.

Construyamos primero el gráfico del denominador. La curva $y=3x^2$ es la parábola estándard «triplicada» (fig. 28). La sustracción de la unidad equivale al desplazamiento del gráfico en una unidad hacia abajo (fig. 29). La curva cortará el eje x en dos puntos que se determinan fácilmente igualando $3x^2-1$ a cero: $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm 0{,}577\ldots$ Elevemos al cuadrado el gráfico obtenido. En los puntos x_1 y x_2 las ordenadas continuarán siendo iguales a cero. Todas las demás ordenadas serán positivas de modo que el gráfico pasará por encima del eje de las abscisas. La ordenada en el punto $x=0$, igual a $(-1)^2=1$, será la mayor en el intervalo comprendido entre

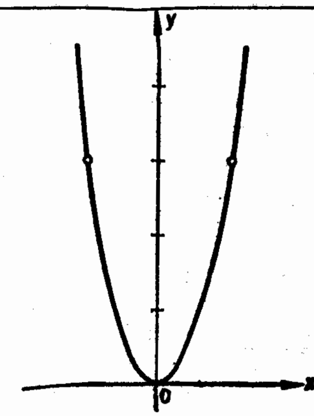

FIG. 28

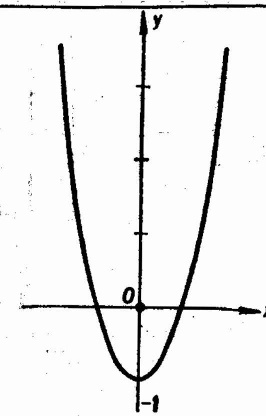

FIG. 29

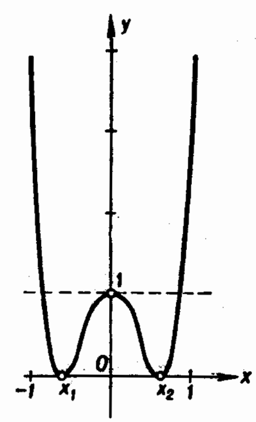

FIG. 30

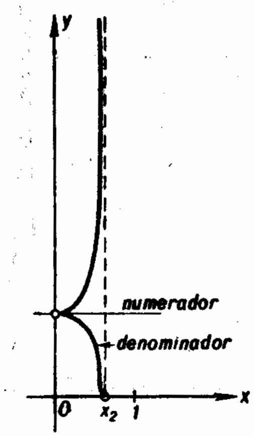

FIG. 31

x_1 y x_2. Fuera de este intervalo la curva se elevará bruscamente en ambas direcciones (fig. 30).

Hemos construido el gráfico del denominador. En esta misma figura hemos representado con una línea de puntos el gráfico del numerador $y=1$. Resta dividir ahora el numerador por el denominador. Puesto que ambos tienen siempre el mismo signo, el cociente será positivo y el gráfico estará

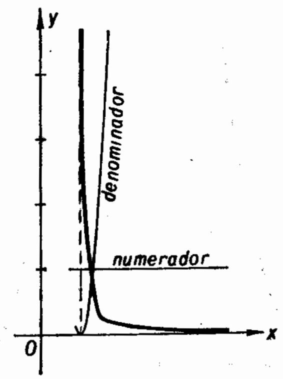

FIG. 32

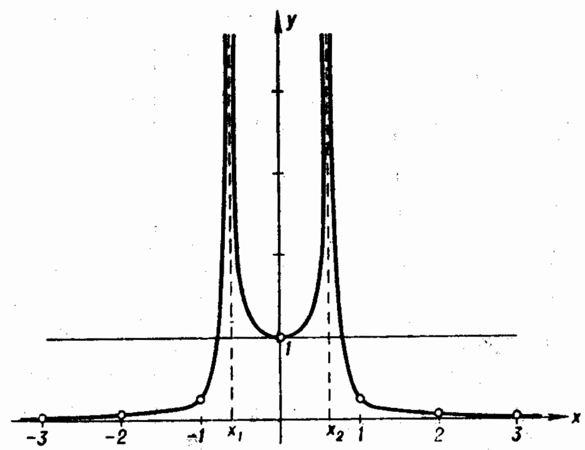

FIG. 33

por encima del eje de las abscisas. Si $x=0$, el numerador y el denominador coinciden y el cociente resulta igual a 1. Desplacémonos según el eje x desde el punto 0 hacia la derecha. El numerador continuará siendo igual a 1 mientras que el denominador irá disminuyendo; por consiguiente, el cociente irá creciendo a partir de 1. Cuando lleguemos al punto $x_2=$ $=0{,}577...$ el denominador se convertirá en cero. Ello significa que para ese momento el cociente se irá al infinito (fig. 31). Pasado el punto x_2, el denominador comenzará a variar rápidamente en el sentido contrario a partir del valor 0, pasando por el valor 1 y aumentando después infinitamente. El cociente, por el contrario, volverá del infinito a la unidad, cortará la recta $y=1$ en el mismo punto que la corta la curva $(3x^2-1)^2$ y continuará aproximándose después al cero tanto como se quiera (fig. 32).

Lo mismo ocurrirá a la izquierda del eje de las ordenadas (fig. 33).

En este último gráfico hemos marcado los puntos correspondientes a los valores enteros $x=0, 1, 2, 3, -1, -2$ y -3. Son los mismos que hemos tomado anteriormente (pág. 10) al construir el gráfico empleando «el método de puntos». Pero la forma real del gráfico difiere considerablemente de la propuesta en la fig. 5.

En realidad, como vemos, la curva, en lugar de descender suavemente desde el valor 1 (para $x=0$) hasta el valor $\frac{1}{4}$ (para $x=1$), se va hacia arriba hasta el infinito. Aquí mismo podemos ver también el punto de coordenadas $x=\frac{1}{2}, y=16$ que no encajaba en el gráfico erróneo anterior y que encaja perfectamente en el gráfico nuevo, correcto.

Hemos hablado de las operaciones elementales que se pueden realizar con los gráficos. Más exactamente: hemos arrancado de la ecuación elemental $y=x$ aplicando después las cuatro operaciones aritméticas (adición, sustracción, multiplicación y división).

Las funciones $y(x)$, que se obtienen aplicando estas operaciones, pueden ser representadas como el cociente de dos polinomios

$$y(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m}$$

y se denominan funciones *racionales* de la variable x. (En el Análisis también existen otras clases de funciones; pero la definición misma de estas funciones requiere el empleo de la teoría desarrollada de los números reales; por eso, en el presente folleto nos limitamos al estudio de las funciones racionales.)

El lector que se haya interesado por la construcción de los gráficos por «el método de operaciones» puede resolver los problemas, de adiestramiento y autocontrol, que proponemos.

PROBLEMAS

Constrúyanse los gráficos a partir de las ecuaciones dadas.

1. $y=x^2+x+1$.
2. $y=x(x^2-1)$.
3. $y=x^2(x-1)$.
4. $y=x(x-1)^2$.
5. $y=\frac{x}{x-1}$.

Sugerencia. En el problema 5 conviene separar la parte entera

$$\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}.$$

6. $y=\frac{x^2}{x-1}$.
7. $y=\frac{x^3}{x-1}$.

Sugerencia. En los problemas 6 y 7 también conviene separar la parte entera.

8. $y=\pm\sqrt{x}$.

Sugerencia. La raíz cuadrada de x existe para $x\geqslant 0$[1] y no existe para $x<0$.

9. $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. ¿Cómo demostrar que la curva obtenida es una circunferencia?

Sugerencia. Recuérdese la definición exacta de la circunferencia y empléese el teorema de Pitágoras.

10. $y=\pm\sqrt{1+x^2}$. Demuéstrese que cuando $x\to\infty$ las ramas de esta curva se aproximan tanto como se quiera a las

[1] Esta afirmación no es, ni mucho menos, obvia y requiere para su argumentación completa el empleo de la teoría desarrollada de los números reales. La demostración puede verse en cualquier libro completo de Análisis. Aquí sólo se exige construir el gráfico de la raíz aceptando su existencia.

bisectrices de los cuadrantes.

Sugerencia. $\sqrt{1+x^2}-x=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$.

11. $y=\pm x\sqrt{x(1-x)}$.
12. $y=\pm x^2\sqrt{1-x}$.
13. $y=\frac{1-x^2}{2\pm\sqrt{1-x^2}}$.
14. $y=x^{\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$.

Las respuestas a todos los problemas vienen en las páginas 51—54.