# Geometría Analítica I
LECTURA 9

Ayudante: Guilmer González Día 27 de octubre, 2005.

El día de hoy veremos:

0. Sobre el tema de vectores. Comentarios.
1. Del libro y otros.

**Problema 1** Dado los vectores $\vec{a} = (1, 2, 3)$ y $\vec{b} = (-1, 5, 2)$, cómo expresar

$$\vec{b} = P_{\vec{a}}\vec{b} + (P_{\vec{a}}\vec{b})^{\perp}$$

donde $P_{\vec{a}}\vec{b}$ es la proyección de $\vec{b}$ en $\vec{a}$.

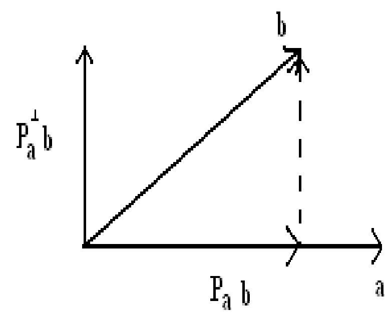


Figura 1: Un vector en términos de su proyección y el ortogonal a este.

Por definición, se tiene que

$$P_{\vec{a}}\vec{b} = \alpha\vec{a}$$

y por construcción

$$(P_{\vec{a}}\vec{b})^{\perp} = \vec{b} - P_{\vec{a}}\vec{b}$$

tomando en cuenta de que $P_{\vec{a}}\vec{b} \perp (P_{\vec{a}}\vec{b})^{\perp}$, se tiene que

$$\begin{aligned} P_{\vec{a}}\vec{b} \cdot (P_{\vec{a}}\vec{b})^{\perp} &= 0 \\ &= (\alpha\vec{a}) \cdot (\vec{b} - \alpha\vec{a}) = 0 \end{aligned}$$

obteniendo

$$\alpha\vec{a} \cdot \vec{b} - \alpha^2 \|\vec{a}\|^2 = 0$$

y con esto

$$\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

por lo que

$$P_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}}\vec{a}, \qquad (P_{\vec{a}}\vec{b})^{\perp} = \vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}}\vec{a}$$

**Problema 2** Dados $\vec{a}$, $\vec{b}$; descomponer uno en la dirección del otro.

1. $\vec{b} = P_{\vec{a}}\vec{b} + (P_{\vec{a}}\vec{b})^{\perp}$
2. $\vec{a} = P_{\vec{b}}\vec{a} + (P_{\vec{b}}\vec{a})^{\perp}$

donde

$$\begin{aligned} P_{\vec{a}}\vec{b} = \alpha\vec{a}; &\qquad \text{con} \quad P_{\vec{a}}\vec{b} \cdot (P_{\vec{a}}\vec{b})^{\perp} = 0 \\ P_{\vec{b}}\vec{a} = \beta\vec{b}; &\qquad \text{con} \quad P_{\vec{b}}\vec{a} \cdot (P_{\vec{b}}\vec{a})^{\perp} = 0 \end{aligned}$$

**Ejemplo 1** Consideremos los vectores $\vec{a} = (-1, 3, 1)$ y $\vec{b} = (2, 0, 4)$, descomponer $\vec{b}$ en término de su proyección sobre $\vec{a}$

Por una parte

$$P_{\vec{a}}\vec{b} = \alpha\vec{a}; \qquad P_{\vec{a}}\vec{b} \cdot (P_{\vec{a}}\vec{b})^{\perp} = 0$$

y con esto podemos expresar

$$(P_{\vec{a}}\vec{b})^{\perp} = \vec{b} - P_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{b} - \alpha\vec{a}$$

calculando tenemos

$$\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \frac{2}{11}$$

así

$$P_{\vec{a}}\vec{b} = \alpha\vec{a} = \frac{2}{11}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} (P_{\vec{a}}\vec{b})^{\perp} &= \vec{b} - P_{\vec{a}}\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} - \frac{2}{11}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ -45 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Trabajo 1** (Deportivo) Sean $P_1(-1,3,2)$, $P_2(0,1,1)$ y $P_3(-3,-3,1)$ los vértices de un triángulo. Calcular las alturas del triángulo.

# 1 Algunos ejercicios

Dado el triángulo $A(-6,0)$, $B(0,0)$ y $C(0,8)$. Encuentre la posición del punto $P = (x,y)$, donde área$(A,B,P) = 3$área$(B,C,P)$.

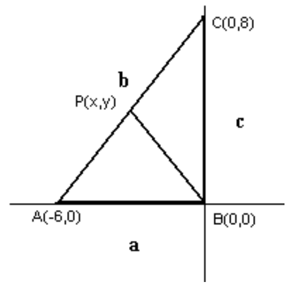


Figura 2: Triángulo rectángulo $ABC$.

Sea $\triangle_1 =$ triángulo$(A, B, P)$, y $\triangle_2 =$ triángulo$(B, C, P)$. Por una parte se observa que

$$\text{área}(\triangle_T) = \text{área}(\triangle_1) + \text{área}(\triangle_2)$$

De la figura, se observa que $\triangle_T = (6\dot{8})/2 = 24$. Pero área$(\triangle_1) = 3$área$(\triangle_2)$, de esto, tenemos que

$$\text{área}(\triangle_2) = 6\mu^2 \qquad \text{área}(\triangle_1) = 18u^2$$

Ahora bien, consideremos los vectores

$$\vec{a} = (-6, 0); \quad \vec{b} = (x, y) \quad \Rightarrow \quad \vec{b}^{\perp} = (-y, x)$$

$$\vec{c} = (0, 8); \quad \Rightarrow \quad \vec{c}^{\perp} = (-8, 0)$$

Debe observarse que el vector $\vec{b}^{\perp} = (-y, x)$ es ortogonal a $\vec{b}$ y ambos tienen la misma magnitud:

$$\|\vec{b}\| = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(-y, x)\| = \|\vec{b}^{\perp}\|$$

`Hacer el trazo de` $\vec{b}^{\perp}$ `en clase, y discutir.`

Como se sabe, el área del paralelogramo formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es $|\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\text{sen}\,\theta|$, por consiguiente

$$\text{área}(\triangle_1) = \frac{1}{2}|\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\text{sen }\theta|$$

De la figura, se observa que

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b}^{\perp} &= \|\vec{a}\|\|\vec{b}^{\perp}\|\cos(90-\theta)\\
&= \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\text{sen }\theta\\
&= \pm 2\text{área}(\triangle_1)
\end{aligned}$$

Una vez que hemos hecho esto, podemos escribir en regla, que

$$\begin{aligned}
\text{área}(\triangle_1) &= \frac{1}{2}|a\cdot\vec{b}^{\perp}| = \frac{1}{2}|(-6,0)\cdot(-y,x)| = 18\\
&= \frac{1}{2}|6y| = 3y = 18
\end{aligned}$$

por consiguiente, $y = 6$. `Mostrar en clase, mediante un dibujito, la razón de esta aseveración. En la descripción no olvidar el vector proyección, y el ortogonal a este.`

Usando el argumento anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}
\text{área}(\triangle_2) &= \frac{1}{2}|c\cdot\vec{b}^{\perp}| = \frac{1}{2}|(0,8)\cdot(-y,x)| = 6\\
&= \frac{1}{2}|8x| = -4x = 6
\end{aligned}$$

por consiguiente $x = -3/2$, y con esto $\vec{p} = (-3/2, 6)$