Geometría Analítica I

Lectura 6

Ayudante: Guilmer González — Día 11 de octubre, 2005

El día de hoy veremos:

0. Comentarios sobre los trabajos últimos.
2. Sobre el cambio de coordenadas.

1 Cambio de coordenadas

Consideremos los puntos $P_0(0,-1)$, $P_1(2,0)$, $P_2(-1,1)$, y $Q_0(2,2)$, $Q_1(-1,4)$ y $Q_2(0,-3)$. Con la colección $\{P_0, P_1, P_2\}$ podemos formar dos vectores y obtener una representación para P. Con $\{Q_0, Q_1, Q_2\}$ formamos otros dos vectores y con esto obtenemos otra representación para el mismo punto.

Problema: Cómo podemos observar la representación de un conjunto en términos del otro.

Consideremos los tres puntos $P_0(0,-1)$, $P_1(2,0)$ y $P_2(-1,1)$. La idea es representar $\vec{P_0P}$ en términos de $\vec{P_0P_1}$ y $\vec{P_0P_2}$. Para lograrlo, observemos a $\vec{P_0P}$ como suma de vectores (debemos considerar el origen, en alguna parte).

$$\begin{aligned} \vec{P_0P} &= \vec{P_0O} + \vec{OP} \\ &= (0,1) + (x,y) \\ &= (x, y+1) \end{aligned}$$

el cual podemos expresarlo como combinación lineal entre $\vec{P_0P_1}$ y $\vec{P_0P_2}$

$$\begin{aligned} (x, y+1) &= \alpha\vec{P_0P_1} + \beta\vec{P_0P_2} \\ &= \alpha(2,1) + \beta(-1,2) \\ &= (2\alpha - \beta, \alpha + 2\beta) \end{aligned}$$

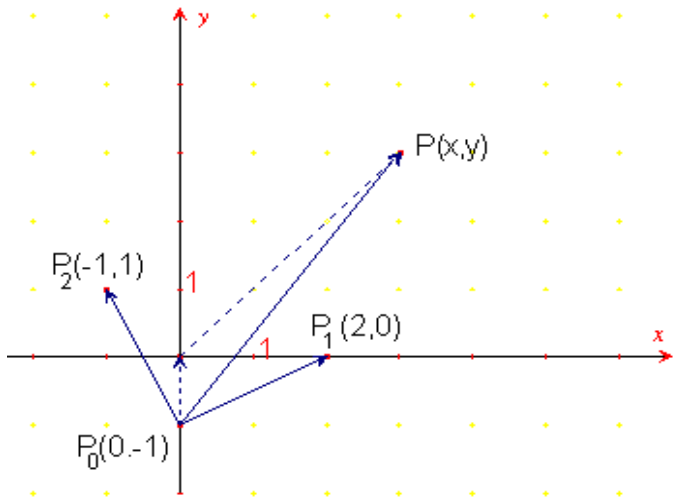

Figura 1: Un sistema de referencia para P.

con esto, logramos el sistema

$$\begin{aligned} x &= 2\alpha - \beta \\ y &= \alpha + 2\beta - 1 \end{aligned}$$

Resolviendo para α y β tenemos

$$\begin{aligned} \alpha &= 2/5x + 1/5y + 1/5 \\ \beta &= -1/5x + 2/5y + 2/5 \end{aligned}$$

esto nos permite pasar de un sistema de coordenadas a otro de manera adecuada. Es decir, si tenemos la posición de $P(x, y)$, tenemos los valores correspondientes en el sistema $\{\vec{P_0P_1}, \vec{P_0P_2}\}$.

Ahora, observemos una representación para P, en $\{Q_0, Q_1, Q_2\}$. Para luego observar una representación de un conjunto en otro.

De nueva cuenta, representamos $\vec{OP}$ como

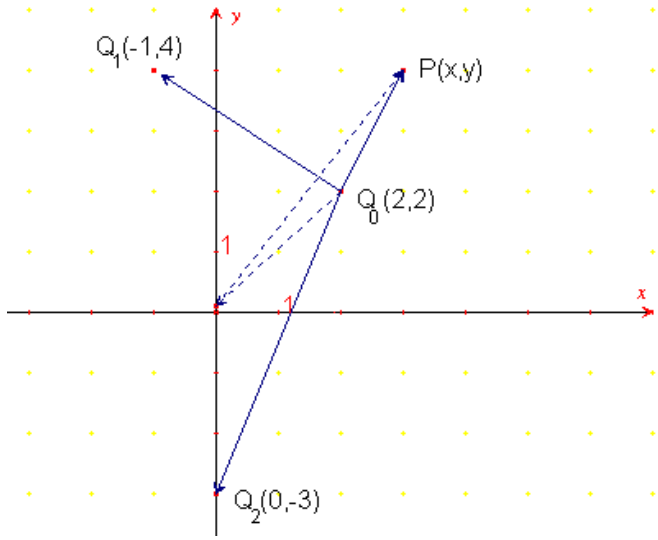

Figura 2: Otro sistema de referencia para P.

$$
\begin{aligned}
\vec{Q_0P} &= \vec{Q_0O} + \vec{OP} \\
&= (-2,-2) + (x,y) \\
&= (x-2, y-2) \\
&= \alpha_1 \vec{Q_0Q_1} + \beta_1 \vec{Q_0Q_2} \\
&= \alpha_1(-3,2) + \beta_1(-2,-5) \\
&= (-3\alpha_1 - 2\beta_1, 2\alpha_1 - 5\beta_1)
\end{aligned}
$$

obteniendo el sistema

$$
\begin{aligned}
x &= -3\alpha_1 - 2\beta_1 + 2 \\
y &= 2\alpha_1 - 5\beta_1 + 2
\end{aligned}
$$

El cual podemos resolver para α_1 y β_1. COn esto, si contamos con la posición de $P(x,y)$, tendremos los valores correspondientes en el sistema $\{\vec{Q_0Q_1}, \vec{Q_0Q_2}\}$.

Ahora bien, observamos nuestra representación para P tenemos en términos de α y β (es decir para el primer sistema de referencia), tenemos

$$
\begin{aligned}
\beta &= -1/5x + 2/5y + 2/5 \\
\alpha &= 2/5x + 1/5y + 1/5
\end{aligned}
$$

y con la correspondencia anterior (entre P y el otro sistema de referencia) tendremos una representación de nuestro sistema entre las $P's$ y las $Q's$

$$
\begin{aligned}
\beta &= -1/5(3\alpha_1 - 2\beta_1 + 2) + 2/5(2\alpha_1 - 5\beta_1 + 2) + 2/5 \\
\alpha &= 2/5(-3\alpha_1 - 2\beta_1 + 2) + 1/5(2\alpha_1 - 5\beta_1 + 2) + 1/5
\end{aligned}
$$

simplicando

$$
\begin{aligned}
\beta &= 7/5\alpha_1 - 8/5\beta_1 + 4/5 \\
\alpha &= -4/5\alpha_1 - 9/5\beta_1 + 7/5
\end{aligned}
$$

El cual podemos resolver para α_1 y β_1 y pasar de un sistema de referencia a otro.

Ahora, observemos una interpretación a lo que estamos haciendo. Fijemos el valor de α, digamos $\alpha = 1$ y barramos β en el sistema de coordenadas para P en término de los vectores $\{\vec{P_0P_1}, \vec{P_0P_2}\}$, qué significado le damos, cuando fijamos un valor de α? `Preguntar a la clase, trazar rectas`.

Ahora que hemos fijado a α, observemos un valor para β, digamos -1. El punto P cómo queda representado en el sistema de referencia $\{\vec{Q_0Q_1}, \vec{Q_0Q_2}\}$? `Preguntar a la clase, hacer comentarios, trazar rectas`.

Ahora, observemos cómo es transformado el espacio "visto" por $\{\vec{P_0P_1}, \vec{P_0P_2}\}$ al espacio "visto" por $\{\vec{Q_0Q_1}, \vec{Q_0Q_2}\}$.

`Hacer algunos comentarios, dibujar en clase.`

`Dejar un problema en` $\mathbb{R}^2$ `y en` $\mathbb{R}^3$.

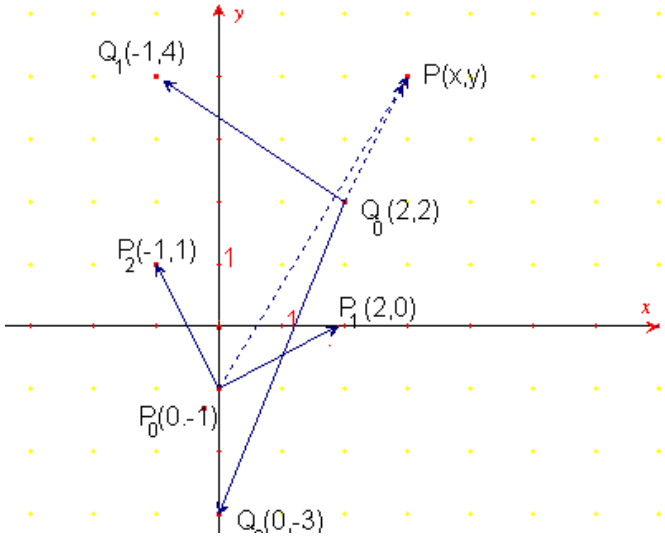

Figura 3: Dos sistemas de referencia para P.