Geometría Analítica I
LECTURA 5

Ayudante: Guilmer González    Día 04 de octubre, 2005

El día de hoy veremos:

1. Calcular el radio del círculo circuscrito y del inscrito en un triángulo rectángulo.
2. Algo sobre cuadriáteros bicíclicos.

# 1 Radio circunscrito e inscrito

## 1.1 Radio del círculo circunscrito

**Problema**: Dado un triángulo rectángulo, calcular

$R$ radio del círculo circunscrito.

$r$ radio del círculos inscrito.

Consideremos un triángulo rectángulo con longitud en sus lados $a$, $b$ y $c$ orientados en sentido negativo, como se muestra en la figura

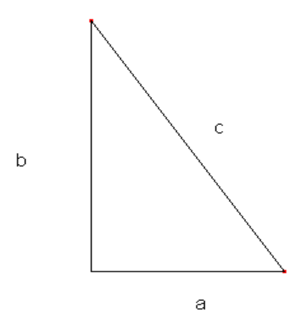


Figura 1: Un triángulo rectángulo.

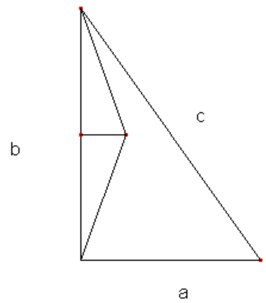


Figura 2: Un trazo auxiliar sobre el triángulo $\triangle ABC$.

**Trazo auxiliar** Tracemos en $b/2$ un segmento perpendicular.

y consideremos la mitad, por decir, de ese segmento. Sea $x^*$ el punto a esa distancia. Observamos dos triángulos semejantes, uno de ellos isósceles. Cuál es la razón? `Preguntarle a alguien.`

Con esta idea, prolongamos el punto $x^*$ hasta el lado $c$ obteniendo dos triángulos isósceles como se muestra en la figura

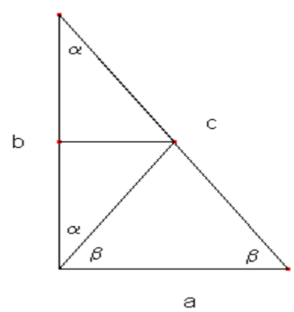


Figura 3: Prolongamos ese trazo auxiliar.

Como se observa, el triángulo $Ax^*C$ es isóscles, el segmento $Cx^*$ mide lo mismo que $x^*A$, luego el ángulo $\angle ACx^*$ mide $\alpha$.

**Observación**: Ahora bien, dado que el $\triangle ABC$ es rectángulo, tenemos que $\alpha + \beta = 90°$.

Con esto, el ángulo $\angle x^*CB$ mide $\beta$ y por consiguiente el triángulo $x^*CB$ es isósceles. De donde concluimos que $Ax^*$ mide lo mismo que $x^*B$ y que $Cx^*$ cuya cantidad es $c/2$.

## 1.2 Radio del círculo inscrito

Consideremos el triángulo rectángulo $\triangle ABC$. La idea es encontrar la longitud del radio inscrito.

Dibujar uno en clase y asignarle nombre a los lados.

Observamos que en los lados del triángulo, por definición, el círculo es tangente. Consideremos esos puntos, el objetivo es medir la longitud del centro del círculo a uno de esos lados.

**Trazo auxiliar**: De los vértices del triángulo, tracemos segmentos hacia el centro del círculo, como se observa, obtenemos algunos triángulos isósceles. `Cuáles son estos? Preguntarle a alguien.`

Observemos que los segmentos que salen de cada vértice tangente al círculo en un punto, por consiguiente esos segmentos del mismo vértices miden lo mismo.

Nombremos las longitudes de los segmentos como se muestra en la figura. `Trazar la figura en clase.`

de donde obtenemos la siguiente relación

$$\begin{aligned} r + z &= a \\ y + z &= b \\ y + r &= c \end{aligned}$$

el cual es un sistema de ecuaciones, de donde obtenemos que

$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

**Observación**: de los triángulos formados, obtenemos que el área del triángulo $\triangle ABC$

$$\begin{aligned} \text{area}(\triangle) &= \frac{a \cdot r + b \cdot r + c \cdot r}{2} = \frac{a + b + c}{2} \cdot r \\ &= \frac{1}{2} a \cdot b \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$r = \frac{ab}{a+b+c}$$

que es otra forma de expresar el valor del radio. Cómo mostramos que son equivalentes? `Tip: Use el hecho de que es un triángulo rectángulo, luego` $a^2 + b^2 = c^2$ `exprese una de las dos relaciones en términos de` $a$ `y` $b$`, y juegue con ellas.`

**Problema** Usando la idea detrás de este ejercicio, muestre que si $Q$ es un cuadriátero bicíclico, la suma de dos de sus lados opuestos es igual a la suma de los otros dos.

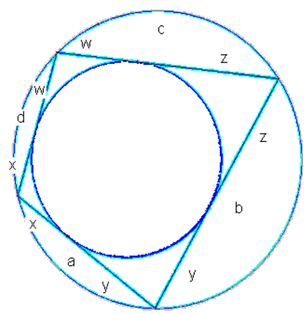


Figura 4: Un cuadriátero bicíclico.