Geometría Analítica I

LECTURA 3

Ayudante: Guilmer González Día 09 de septiembre, 2005

El día de hoy veremos:

1. Problemas comunes que se tuvieron con el examen, resolver, comentar las ideas, no entrar en detalles.
2. Forma de Newton del polinomio interpolador, desarrollo de Taylor de un polinomio

1 Sobre la forma de Newton y el desarrollo de Taylor de un polinomio

Usualmente un polinomio cuadrático lo escribimos de la forma

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a es el término cuadrático, b el lineal y c el independiente.

Problema: Se cuenta con tres puntos distintos, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ no colineales. Cuál es el polinomio cuadrático de interpolación? Es decir, cómo son los coeficientes a, b y c de $p(x) = ax^2 + bx + c$?

La parábola que describe $p(x)$ pasa por esos puntos, es decir

$$\begin{aligned} p(x_1) &= y_1 \\ p(x_2) &= y_2 \\ p(x_3) &= y_3 \end{aligned}$$

Solamente existe un polinomio de grado 2 que satisfsface esta relación, y una familia de soluciones posibles para polinomios de grado mayor.

De la condición de interpolación, se tiene una condición sobre los coeficientes de la cuadrática

$$
\begin{aligned}
ax_1^2 + bx_1 + c &= y_1 \\
ax_2^2 + bx_2 + c &= y_2 \\
ax_3^2 + bx_3 + c &= y_3
\end{aligned}
$$

un sistema lineal, de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. El problema, ahora es resolver este sistema.

Ahora bien, cualquier polinomio, se puede escribir, alrededor de un punto. En el caso cuadrático

$$p(x) = a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c$$

donde ahora, los coeficientes a, b y c son parte, de los coeficientes cuadráticos, de la forma usual.

Sin embargo, esta forma nos ofrece mayor información y nos permite facilitar las operaciones al resolver, por ejemplo, el problema de interpolación.

Si consideremos el desarrollo del polinomio cuadrático a lo largo de $x_0 = x_1$ (x_1 es uno de los ceros de p) tendremos la expresión

$$p(x) = a(x - x_1)^2 + b(x - x_1) + c$$

impongamos las condiciones de interpolación

$$
\begin{aligned}
p(x_1) &= y_1 \\
p(x_2) &= y_2 \\
p(x_3) &= y_3
\end{aligned}
$$

lo cual nos conduce al sistema lineal

$$
\begin{aligned}
c &= y_1 \\
a(x_2 - x_1)^2 + b(x_2 - x_1) + c &= y_2 \\
a(x_3 - x_1)^2 + b(x_3 - x_1) + c &= y_3
\end{aligned}
$$

El cual es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, más sencillo de resolver.

Lo importante de esta forma de ver el polinomio está en observar el comportamiento del mismo a lo largo del punto x_0 elegido. Por ejemplo, para x cercano a x_0,

$$p(x) \approx b(x - x_0) + c$$

ya que $(x - x_0)^2 < (x - x_0)$ para $|x - x_0| \ll 1$. Es decir, $p(x)$ se comporta como la recta $b(x - x_0) + c$.

Este análisis nos permite observar el comportamiento de cualquier polinomio, a lo largo de un punto.

Ahora bien, contemos con dos puntos de referencia x_1 y x_2, la forma de Newton para un polinomio cuadrático es

$$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2) + b(x - x_1) + c$$

esta es una forma muy sencilla y práctica de representar una cuadrática. Si observamos el problema primero, el de interpolación, y consideremos dos de los puntos sobre los que debe pasar la parábola como puntos de referencia de la forma de Newton, la condición de interpolación se reduce a

$$
\begin{aligned}
c &= y_1 \\
b(x_2 - x_1) + c &= y_2 \\
a(x_3 - x_1)^2 + b(x_3 - x_1) + c &= y_3
\end{aligned}
$$

un sistema sumamente sencillo de resolver.

El asunto, es observar un polinomio de una forma, la forma de Newton, o bien de otra, el desarrollo de Taylor.

Prop. Dado, los puntos x_1, y x_2, cualquier polinomio cuadrático se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} p(x) &= ax^2 + bx + c. \\ p(x) &= \tilde{a}(x - x_1)^2 + \tilde{b}(x - x_1) + \tilde{c}. \\ p(x) &= \hat{a}(x - x_1)(x - x_2) + \hat{b}(x - x_1) + \hat{c}. \end{aligned}$$

La elección de la representación del polinomio, dependerá del problema, una elección poco afortunada, nos llevará a resolver un sistema complicado.

Problema. Construya la parábola que tiene por ceros a $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, y que en $x_2 = 3$, la pendiente de la recta tangente a la curva sea 2.

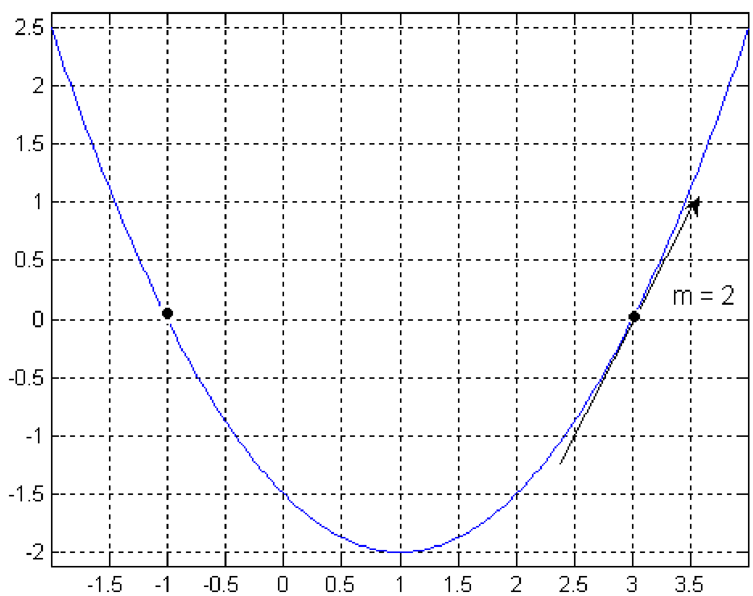

Figura 1: Una parábola que sale de $x = 3$ con pendiente $m = 2$.

Si consideramos el polinomio en la forma $p(x) = ax^2 + bx + c$, las condiciones se escriben como

$$
\begin{aligned}
p(1) = a(-1)^2 + b(-1) + c = a - b + c &= 0 \\
p(3) = a(3)^2 + b(3) + c = 9a + 3b + c &= 0 \\
p'(3) = 2a(3) + b = 6a + b &= 2
\end{aligned}
$$

Ahora bien, si usamos el desarrollo del polinomio a lo largo de $x = -1$, es decir

$$p(x) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$$

tendremos las condiciones

$$
\begin{aligned}
p(1) = a(0)^2 + b(0) + c = c &= 0 \\
p(3) = a(4)^2 + b(4) + c = 16a + 4b &= 0 \\
p'(3) = 2a(4) + b = 8a + b &= 2
\end{aligned}
$$

resolviendo $b = -2$, $a = 1/2$. Lo que nos lleva

$$
\begin{aligned}
p(x) &= 1/2(x+1)^2 - 2(x+1) \\
&= 1/2x^2 - x - 3/2
\end{aligned}
$$

Ahora bien, si usamos la forma de Newton para la parábola, tenemos

$$p(x) = a(x+1)(x-3) + b(x+1) + c$$

para el cual, tendremos las condiciones

$$
\begin{aligned}
p(1) = a(0)(-4) + b(0) + c = c &= 0 \\
p(3) = a(4)(0) + b(4) = 4b &= 0 \\
p'(3) = 2a(3) - 2a &= 2
\end{aligned}
$$

obteniendo $a = 1/2$, $b = c = 0$, y

$$\begin{aligned} p(x) &= 1/2(x+1)(x-3) \\ &= 1/2x^2 - x - 3/2 \end{aligned}$$

Ahora bien, hagamos el desarrollo de Taylor, a lo largo de $x = 3$,

$$p(x) = a(x-3)^2 + b(x-3) + c$$

$$\begin{aligned} p(1) = a(0)^2 + b(0) + c = c &= 0 \\ p(3) = a(-4)^2 + b(-4) + c = 16a - 4b &= 0 \\ p'(3) = 2a(0) + b = b &= 2 \end{aligned}$$

y por consiguiente, $a = 1/2$, con lo cual, la cuadrática se expresa como

$$\begin{aligned} p(x) &= 1/2(x-3)^2 + 2(x-3) \\ &= 1/2x^2 - 3x + 9/2 + 2x - 6 \\ &= 1/2x^2 - x - 3/2 \end{aligned}$$

Lo interesante de esta forma de representar la cuadrática, por medio de la expresión

$$p(x) = a(x-3)^2 + b(x-3) + c$$

es lo siguiente, para $x = 3$, esta tiene un cero, luego $c = 0$. Para $x \approx 3$ (observemos que $|x - 3| \ll 1$) y

$$p(x) \approx b(x-3)$$

ahora bien, dado que $p'(3) = 2$, esto significa que la pendiente de la recta tangente a $p(x)$ en $x = 3$ es 2, pero $p(x)$ a lo largo de $x = 3$ se comporta como $b(x-3)$, por consiguiente, $b = 2$.

Por otra parte, dado que $p(1) = 4a - b = 0$, se sigue que $a = 1/2$.

Con esto, hemos resuelto el mismo problema, a través del análisis local del comportamiento de la gráfica, y sin resolver un sistema de ecuaciones complicado; logrando una solución económica por medio de un procedimiento elegante.